

Weltrekord–Flächen

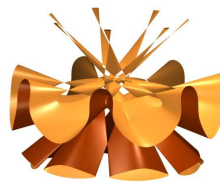
Algebraische Flächen mit vielen Singularitäten

Oliver Labs (www.MO-Labs.com)

7. November 2018

Zusammenfassung

Algebraische Flächen können glatt sein oder auch einige Spitzen (sogenannte *isolierte Singularitäten*, die Fläche auf dem Bild unten hat 99 davon — man sieht allerdings nicht alle, da die Abbildung nur einen kleinen Ausschnitt zeigt) haben. Beschränkt man sich auf Flächen mit gewissen Eigenschaften, z.B. auf Flächen mit einem festen sogenannten *Grad*, so konnte man bereits im 19. Jahrhundert beweisen, dass jede solche Fläche nur endlich viele isolierte Singularitäten haben kann. Unmittelbar stellt sich die Frage: Wie viele?



Eine Fläche vom Grad 7 mit 99 Singularitäten.

Um diese Frage zu beantworten, muss man für jeden Grad (das ist eine natürliche Zahl $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$) eine Zahl $\mu(d)$ finden, so dass es tatsächlich eine Fläche vom Grad d mit $\mu(d)$ Singularitäten gibt und so dass man irgendwie zeigen kann, dass eine solche Fläche auch nicht mehr Singularitäten besitzen kann.

Jede Fläche vom Grad d , die alle vorher bekannten Zahlen von Singularitäten auf einer Fläche von festem Grad d übertrifft, ist ein neuer Weltrekord. Schafft man es außerdem noch zu beweisen, dass eine solche Fläche nicht mehr Singularitäten besitzen kann, so hat man sogar gezeigt, dass der Weltrekord nie mehr zu verbessern ist!

Wir werden sehen, dass bei der Suche nach Weltrekord-Flächen viel interessante Mathematik und insbesondere Geometrie ins Spiel kommt; sowohl Platonische Körper als auch der Goldene Schnitt werden mehrfach auftauchen sowie sogenannte endliche Zahlensysteme.

1 Algebraische Flächen — Eine kurze Einführung

In diesem Abschnitt erläutern wir detailliert, was algebraische Flächen sind und wie wir einige einfache Flächen recht gut verstehen können. Dazu benötigen wir etwas Mathematik, insbesondere müssen wir mit Gleichungen arbeiten, die durch Polynome gegeben sind, d.h. Gleichungen wie beispielsweise

$$x^3 + 3xyz + y^2 - z^2 = 0.$$

Die durch diese Gleichung definierte *algebraische Fläche* besteht aus all jenen Punkten (x, y, z) des drei-dimensionalen Anschauungsraums, die beim Einsetzen von x, y, z in die linke Seite der Gleichung 0 ergeben. Die Abbildung 1 zeigt einige typische algebraische Flächen, manche davon glatt, andere mit Spitzen (sogenannten Singularitäten).



Abbildung 1: Einige algebraische Flächen, manche glatt (die linken beiden), andere mit vielen Spitzen, sogenannten Singularitäten (die rechten drei).

Doch ein Schritt nach dem anderen: zunächst betrachten wir algebraische Kurven, die man mit den Mitteln der Schulmathematik recht gut verstehen kann. Darauf aufbauend werden wir uns dann mit den Flächen beschäftigen. Wer sich hauptsächlich für die Geschichte und Geometrie der Weltrekord-Flächen interessiert, kann versuchen, direkt zum entsprechenden Abschnitt 2 zu springen, doch werden dort wir zumindest einige der Begriffe verwenden, die hier erläutert werden.

1.1 Ebene algebraische Kurven

Algebraische Kurven können wir über den Zugang von Funktions-Graphen recht gut verstehen; doch bei weitem nicht alle algebraischen Kurven entstehen als Graph einer Funktion! Trotzdem beginnen wir zunächst mit diesen speziellen Kurven:

1.1.1 Graphen von Funktionen

Wir betrachten eine Zuordnung f der Form $x \mapsto f(x)$, die jeder reellen Zahl x eine eindeutige reelle Zahl $f(x)$ zuweist; solche Zuordnungen heißen *Funktionen*.

Beispiel 1. Einige einfache Beispiele von Funktionen:

- $f: x \mapsto f(x) = x$.
- $g: x \mapsto g(x) = x^2$.

Veranschaulichen können wir uns solche Funktionen mit Hilfe ihres **Graphen** in einem **Koordinatensystem**, indem wir dort alle Punkte mit den Koordinaten $(x, f(x))$ bzw. $(x, g(x))$ eintragen (Abb. 2).

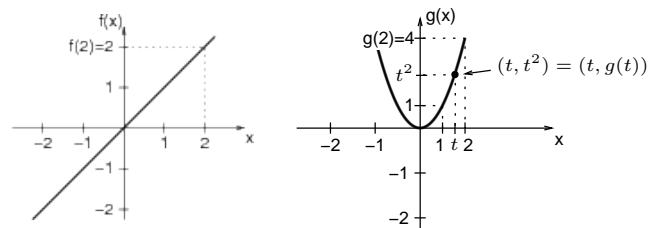


Abbildung 2: Graphen von $f: x \mapsto x$, $g: x \mapsto x^2$.

1.1.2 Implizite Gleichungen

Schreibt man bei den Graphen für $f(x)$ bzw. $g(x)$ jeweils kurz y , so ergeben sich die Gleichungen:

- $f: y = x$.
- $g: y = x^2$.

Der Graph von g besteht also aus all den Punkten (x, y) , die die Gleichung $y = x^2$ erfüllen.

Schreiben wir dies um zu $y - x^2 = 0$, so ist die Gleichung nicht mehr praktischerweise nach y aufgelöst. Eine solche nicht nach y aufgelöste Form heißt **implizite Gleichung**. In diesem Fall ist das Auflösen der impliziten Gleichung nach y natürlich ganz einfach, doch bei komplizierten Gleichungen ist dies im Allgemeinen gar nicht möglich! Hier ein weiteres Beispiel einer impliziten Gleichung:

Frage 1. Wie sieht die Menge all jener Punkte aus, die die Gleichung k :

$$x^2 + y^2 = 1$$

erfüllen?

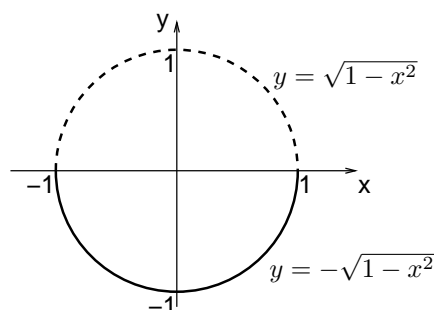
Offenbar hat diese Gleichung für Punkte mit $|x| > 1$ oder $|y| > 1$ keine Lösung. Um k genauer zu verstehen, versuchen wir, die Gleichung nach y aufzulösen, um analog zu oben einen Graph zu zeichnen:

$$y^2 = 1 - x^2,$$

d.h. $y = \sqrt{1 - x^2}$ oder $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (auch hier sieht man, dass $|x| > 1$ keine Lösung liefert).

Die Gleichung k führt also **nicht** auf eine Funktion (bei der ja jedem x ein eindeutiges y zugeordnet wird!).

Trotzdem können wir in ein Koordinatensystem alle Punkte einzeichnen, die die geforderte Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, nämlich in zwei Teilen:



Beispielsweise liegt der Punkt $P = (\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ auf dem oberen Teil dieser Kurve, denn setzen wir die x -Koordinate von P in $\sqrt{1 - x^2}$ ein, so erhalten wir:

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

was tatsächlich die y -Koordinate von P ist.

Wir hätten dies auch direkt an der oben gegebenen Gleichung für k sehen können, indem wir die Koordinaten von P dort einsetzen:

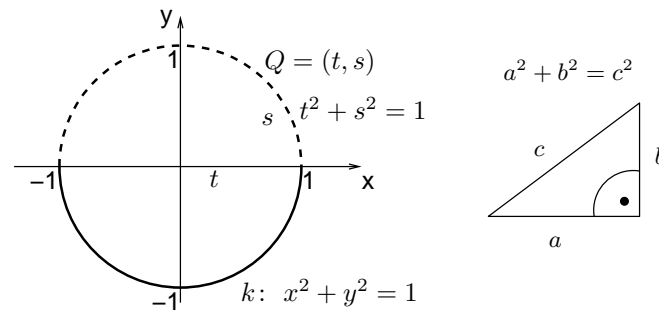
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

1.1.3 Kreise und Ellipsen

Das Bild im vorigen Abschnitt sieht aus wie ein Kreis; und tatsächlich können wir beweisen, dass alle Punkte, die die Gleichung $k: x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, einen Kreis mit Radius 1 beschreiben!

Ein **Kreis** ist nämlich die Kurve der Punkte, die von einem gewählten **Mittelpunkt** M den gleichen Abstand $r > 0$ haben. Und diese Eigenschaft haben

auch die Punkte auf k . Dies kann man folgendermaSSen sehen: Nehmen wir einen Punkt $Q = (t, s)$ auf einem Kreis mit Radius 1 um den **Ursprung** $(0, 0)$.



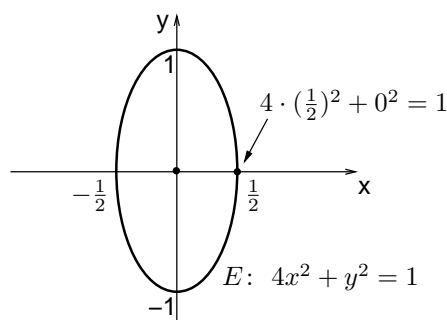
Der **Satz des Pythagoras** sagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse der Länge c und Katheten der Längen a, b gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Angewendet auf unseren Punkt $Q = (t, s)$ auf dem Kreis heiSSt dies: $t^2 + s^2 = 1$, da das Dreieck MPQ rechtwinklig ist und da die Länge der Strecke QM gerade der Radius (also hier 1) des Kreises ist. Q erfüllt also die Gleichung für k . Umgekehrt liegt jeder Punkt, der $k: x^2 + y^2 = 1$ erfüllt, auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius 1.

Analog beschreibt $x^2 + y^2 = r^2$ einen Kreis mit Radius r . Ersetzt man eine der Koordinaten, z.B. x , durch ein Vielfaches, z.B. $2x$, so verändert sich die Gleichung zu: $E: 4x^2 + y^2 = 1$.

Frage 2. *Wie sieht die Kurve der Punkte aus, die E erfüllen?*

Dies ist eine in der x -Richtung gestauchte Variante des Kreises, eine **Ellipse**:



1.2 Algebraische Flächen

Nach den ebenen algebraischen Kurven betrachten wir nun algebraische Flächen. Wir beginnen mit denen, die den Kurven sehr stark ähneln, nämlich Zylinder. Erst dann kommen wir zu Kugeloberflächen und anderen Objekten.

1.2.1 Ein Zylinder

Auch Punkte im Raum können wir durch Koordinaten beschreiben (linkes Bild in Abb. 3):

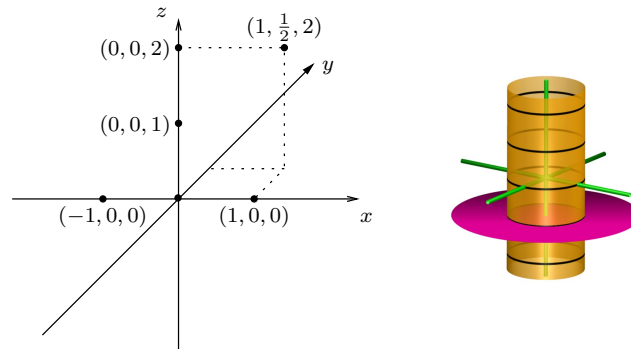


Abbildung 3: Der Punkt $(1, \frac{1}{2}, 2)$ in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem und ein Zylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ (die vertikale Achse ist die z -Achse).

Zeichnen wir jetzt alle Punkte (x, y, z) ein, die die bereits im vorigen Abschnitt verwendete Kreisgleichung $k: x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, so fällt auf, dass diese Gleichung nicht von z abhängt! Daher gilt: (x, y) erfüllt $k \Rightarrow (x, y, z)$ erfüllt k für jedes beliebige z .

Die Menge aller Punkte (x, y, z) im Raum, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, besteht also aus lauter Kreisen (für jeden Wert z nämlich einen, rechtes Bild oben). Eine solche Fläche nennt man **Zylinder**.

Die pink eingezeichnete Ebene im Bild hat die Gleichung $z = -1$. Sie besteht aus allen Punkten, deren z -Koordinate -1 ist, liegt also parallel zur x, y -Ebene. Sie schneidet den Zylinder in einem Kreis.

1.2.2 Eine Kugeloberfläche (Sphäre)

Betrachten wir jetzt Gleichungen, in denen auch die dritte Variable, z , vorkommt:

Frage 3. *Wie sieht die Menge der Punkte im Raum aus, die die Gleichung*

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

erfüllen?

Um dies zu verstehen, überlegen wir uns, wie beim Zylinder, wie die Schnitte der Menge mit Ebenen aussehen, die parallel zur x, y -Ebene liegen:

Der Schnitt der Menge aller Punkte, die $z = 0$ erfüllen, mit jener Menge aller Punkte, die $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfüllen, besteht aus genau den Punkten, die beide Gleichungen erfüllen. Wir können also die Forderung $z = 0$ in die zweite Gleichung einsetzen und erhalten: $x^2 + y^2 = 1$, einen Kreis mit Radius 1 (links in Abb. 4):

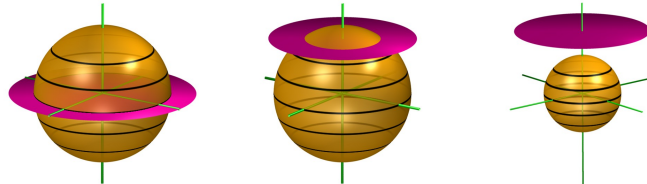


Abbildung 4: Drei Ebenen-Schnitte der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Analog ergibt sich:

- $|z| = \frac{9}{10}$, $x^2 + y^2 + \frac{81}{100} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - \frac{81}{100})$, $z = \frac{9}{10}$, ein kleinerer Kreis (mittleres Bild oben).
- $|z| = 1$, $x^2 + y^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$, $z = 1$. Diese Gleichung erfüllt nur der Punkt $(0, 0, 1)$.
- $|z| > 1$, $x^2 + y^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 0$, $|z| > 1$. Dies hat keine Lösung, da $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ (rechtes Bild oben).

Analog zur Rechnung beim Kreis kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras nachweisen, dass jeder Punkt der Fläche, die durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

definiert wird, Abstand r vom Ursprung $(0, 0, 0)$ des Koordinatensystems hat, dass die Gleichung also eine Kugeloberfläche (auch **Sphäre** genannt) mit Radius r beschreibt.

1.2.3 Ein Ellipsoid

Genau wie bei der Ellipse oben, können wir nun die Gleichung der Sphäre leicht verändern, indem wir in einer Koordinatenrichtung, z.B. z , mit einem Faktor $a > 0$ strecken oder stauchen. Das liefert:

$$x^2 + y^2 + (az)^2 = 1.$$

Die Bilder in Abb. 5 zeigen die drei möglichen Fälle $a = \frac{3}{4}$ (gestreckt), $a = 1$ (Sphäre), $a = \frac{3}{2}$ (gestaucht), wobei auch der Schnitt mit $y = 0$ eingezeichnet ist.

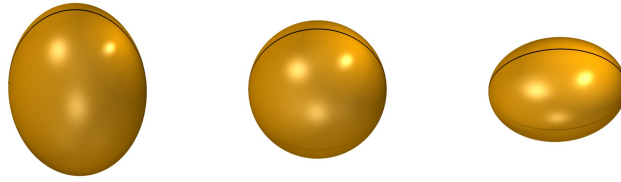


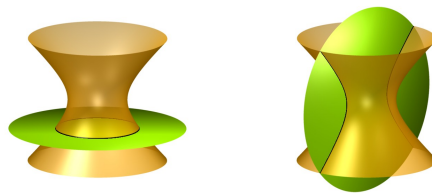
Abbildung 5: Drei verschiedene Ellipsoide.

1.2.4 Hyperboloid und Kegel

Ähnlich zur Kugel und zum Ellipsoiden sind Hyperboloiden. Im Vergleich zur Sphäre hat sich in der folgenden Formel nur ein Vorzeichen geändert:

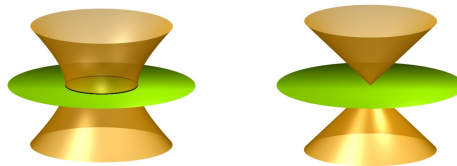
$$x^2 + y^2 - z^2 = r^2.$$

Für feste Werte von $z = a$ ergeben sich wieder Kreise (linkes Bild) mit Gleichung $x^2 + y^2 = r^2 + a^2$. Im Gegensatz dazu erhält man mit festen Werten von $y = a$ nun aber sogenannte Hyperbeln (rechtes Bild) mit Gleichung $x^2 - z^2 = r^2 - a^2$:

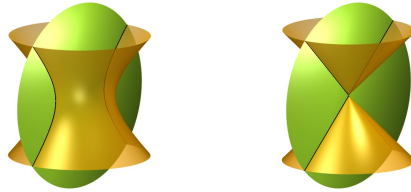


Frage 4. Was passiert nun, wenn wir den Wert für r immer kleiner wählen?

Für den Schnitt mit der Ebene $z = 0$ ergeben sich immer kleinere Kreise, bis sie schließlich für $r = 0$ zu einem Punkt mit Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ geschrumpft sind (linke beiden Bilder unten):



Für die Ebene $y = 0$ ergeben sich Hyperbeln, die sich immer mehr zwei Geraden annähern, bis man schließlich für $r = 0$ zwei sich schneidende Geraden mit Gleichung $(x^2 - z^2) = 0$ erhält, da: $x^2 - z^2 = (x + z) \cdot (x - z)$.



1.2.5 Flächen von höherem Grad

Bisher haben wir nur sehr spezielle algebraische Flächen betrachtet, nämlich solche, die sich als Nullstellen von Polynomen vom Grad 1 oder 2 ergeben.

Im Allgemeinen ist eine **algebraische Fläche** vom Grad d die Menge aller Nullstellen eines Polynoms vom Grad d in drei Variablen:

$$a_1x^d + a_2x^{d-1}y + a_3x^{d-1}z + a_4x^{d-1} + a_5x^{d-2}y^2 + \dots + a_k = 0,$$

wobei die a_i gewisse Konstanten sind.

Beispiele von Flächen von höherem Grad lernen wir im folgenden Abschnitt über Singularitäten kennen.

1.2.6 Flächen über reellen und komplexen Zahlen

Im vorigen Abschnitt haben wir nicht thematisiert, aus welchem Zahlenbereich die Konstanten a_i und die Werte, die wir für x, y, z einsetzen dürfen, stammen. Stillschweigend werden die meisten Leser hier reelle Zahlen angenommen haben. Häufig ist es aber auch sinnvoll, algebraische Flächen über anderen Zahlensystemen zu betrachten, insbesondere über den **komplexen Zahlen**. Lassen wir nur reelle Zahlen zu, so ergibt sich nämlich folgende Schwierigkeit: Die Gleichung

$$x^2 + y^2 - a = 0$$

hat für $a > 0$ eine ganze Kurve von reellen Punkten (x, y) als Lösungsmenge, nämlich einen Kreis mit Radius \sqrt{a} ; für $a = 0$ ergibt sich als einzige reelle Lösung der Punkt $(0, 0)$ und für $a < 0$ existiert gar keine reelle Lösung.

Wir können hier nicht detailliert komplexe Zahlen vorstellen, sondern betrachten nur das obige Beispiel etwas genauer. Wir erweitern die bekannte Menge der reellen Zahlen, indem wir auch Zahlen der Form $a+ib$ (sogenannte **komplexe Zahlen**, die kurz als \mathbb{C} notiert) zulassen, wobei i die **imaginäre Einheit** ist, d.h. eine Zahl, für die gilt: $i^2 = -1$. Offenbar kann i keine reelle Zahl sein, da ja Quadrate reeller Zahlen immer nicht negativ sind. Man kann zeigen, dass man mit Hilfe von Zahlen der Form $a + ib$ nicht nur die über den reellen Zahlen nicht lösbare Gleichung $x^2 = -1$ lösen kann, sondern

dass man sogar für jedes Polynom vom Grad $d \geq 1$ in einer Variablen eine Nullstelle der Form $a + ib$ findet! Beispielsweise sind die komplexen Zahlen $1 + i\sqrt{3}$ und $1 - i\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x + 4 = 0$, da:

$$\begin{aligned}
 (x - (1 + i\sqrt{3}))(x - (1 - i\sqrt{3})) &= (x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3}) \\
 &= (x - 1)^2 - (i\sqrt{3})^2 \\
 &= x^2 - 2x + 1 - i^2 \cdot \sqrt{3}^2 \\
 &= x^2 - 2x + 1 - (-1) \cdot 3 \\
 &= x^2 - 2x + 4.
 \end{aligned}$$

Dies führt dazu, dass auch die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ über den komplexen Zahlen Lösungen hat; beispielsweise liegen die Punkte $(0, \pm i)$, $(\pm i, 0)$ auf diesem Kreis. Obwohl es sich vermutlich auf den ersten Blick nicht so anhört, vereinfacht sich durch Hinzunahme auch komplexer Lösungen das Studium algebraischer Kurven und Flächen in vielerlei Hinsicht sehr, da man nicht immer die Fälle unterscheiden muss es gibt „keine Lösung“, „endlich viele Lösungen“ oder „unendlich viele Lösungen“: über den komplexen Zahlen hat der „Kreis“ mit Gleichung $x^2 + y^2 + a = 0$ für jedes a unendlich viele Lösungen — und Analoges gilt auch für algebraische Flächen.

1.3 Singularitäten

Singularitäten heißen ganz spezielle Punkte algebraischer Kurven und Flächen. Um diese allmählich kennen zu lernen, beginnen wir mit der einfachsten Singularität, einem sogenannten gewöhnlichen Doppelpunkt, bevor wir dann etwas kompliziertere Punkte betrachten.

1.3.1 Ein gewöhnlicher Doppelpunkt

Der spitze Punkt (der Ursprung $(0, 0, 0)$) des Kegels mit Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

den wir oben gesehen haben (s. auch Abb. 6), ist eine sogenannte **Singularität**. Auch algebraisch sind Singularitäten durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet: Fassen wir das Polynom $k = x^2 + y^2 - z^2$ jeweils als ein Polynom in einer Variablen auf, in dem die anderen Variablen Konstanten sind, so können wir jeweils die **Ableitung** des Polynoms nach dieser Variablen bilden. Ist beispielsweise x die Variable und sehen wir y, z als Konstanten an, so ist die Ableitung $2x$, da die Ableitung einer Konstante 0 ergibt. Man schreibt dies kurz:

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, y, z) = 2x$$

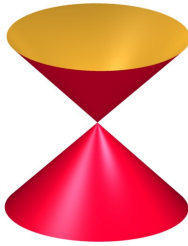


Abbildung 6: Ein Doppelkegel mit einer Singularität in $(0, 0, 0)$, die gewöhnlicher Doppelpunkt genannt wird.

und nennt diesen Ausdruck die **partielle Ableitung von k nach x** . Analog findet man für die partiellen Ableitungen nach y bzw. z :

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial k}{\partial z}(x, y, z) = -2z.$$

Der einzige Punkt $P = (P_x, P_y, P_z)$, für den sowohl $k(P_x, P_y, P_z) = 0$ und auch alle diese partiellen Ableitungen 0 werden, ist hier offenbar der Punkt $O = (0, 0, 0)$, der Ursprung, weil $2x = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ und entsprechend für y und z .

Ein Punkt $P = (P_x, P_y, P_z)$ einer algebraischen Fläche mit einer Gleichung $f(x, y, z) = 0$ heißt daher **Singularität** (andernfalls heißt der Punkt P **glatt**), wenn sowohl gilt

$$f(P_x, P_y, P_z) = 0$$

als auch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_x, P_y, P_z) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_x, P_y, P_z) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_x, P_y, P_z) = 0.$$

Für Leser, die mit Vektoren, Ebenen und Tangenten vertraut sind, mag die folgende Erklärung zum anschaulichen Verständnis dieser Definition beitragen: Schreibt man alle drei Werte der partiellen Ableitungen im Punkt P in einen Vektor

$$\Delta_f(P) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_x, P_y, P_z), \frac{\partial f}{\partial y}(P_x, P_y, P_z), \frac{\partial f}{\partial z}(P_x, P_y, P_z) \right),$$

genannt **Gradient** von f in P , und ist $\Delta_f(P) \neq (0, 0, 0)$ (d.h. P ist glatt nach obiger Definition), dann steht dieser Gradient senkrecht auf der Tangentialebene T an den Punkt P der gegebenen Fläche f . Die Tangentialebene an einen glatten Punkt einer Fläche ist also einfach zu bestimmen. Singularitäten sind nun Punkte, für die das nicht so einfach geht, weil der Gradient $(0, 0, 0)$ ist und daher keine Ebene definiert.

Singularitäten können übrigens sehr unterschiedlich aussehen (insbesondere nicht unbedingt spitz) und haben viele Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, zur Physik und der belebten und unbelebten Natur.

Die Singularität des oben gezeigten Kegels ist die einfachste Singularität und wird **gewöhnlicher Doppelpunkt** genannt. Sie ist ausgezeichnet unter allen Singularitäten durch die Eigenschaft, dass die sogenannte Determinante der Hessematrix, kurz: $\det H_f$, in diesem Punkt nicht verschwindet. Die Gleichung $\det H_f$ erhält man aus jener von f durch Bilden einiger zweiter partieller Ableitungen, also partieller Ableitungen der partiellen Ableitungen, nämlich:

$$\det H_f := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} \end{pmatrix},$$

wobei die sogenannte **Determinante**, kurz: \det , folgendermaßen berechnet wird:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Leicht lässt sich für $f = x^2 + y^2 - z^2$ nachrechnen:

$$\det H_f(0, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0,$$

d.h. f hat einen gewöhnlichen Doppelpunkt in $(0, 0, 0)$.

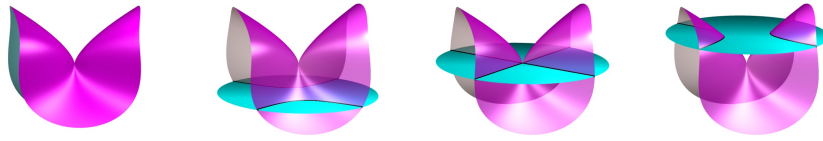
1.3.2 A_k Singularitäten

Durch kleine Veränderungen an der Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ des Kegels können wir bereits sehr unterschiedliche Singularitäten erhalten.

Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$A_2^{+-}(x, y, z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0.$$

Offenbar ist hier der Punkt $(0, 0, 0)$ auch eine Singularität von A_2^{+-} , da nämlich Einsetzen in die Gleichung und in die partiellen Ableitungen $3x^2$, $2y$, $-2z$, jeweils 0 ergibt (linkes Bild):

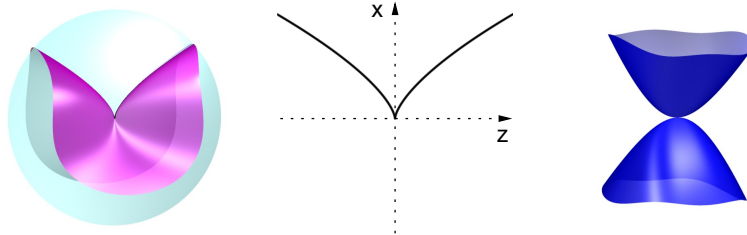


Allerdings ist der Punkt $(0, 0, 0)$ kein gewöhnlicher Doppelpunkt, weil die Determinanten der Hessematrix dort verschwindet:

$$\det H_{A_2^{+-}}(0, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} 6 \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Versuchen wir wieder, die Geometrie dieser Fläche etwas zu verstehen, indem wir sie mit verschiedenen Ebenen schneiden. Der Schnitt mit Ebenen $x = a$ ergibt $a^3 + y^2 - z^2 = 0$, also finden wir für $a \neq 0$ Hyperbeln und für $a = 0$ zwei Geraden (rechte drei Bilder oben).

Interessant wird es nun für Schnitte mit $y = a$. Für $a = 0$ finden wir nämlich eine Kurve mit einer Spitze, die **Cuspe** genannt wird (linkes Bild unten), mit Gleichung $x^3 - z^2 = 0$. Mit einem Taschenrechner oder einem Computeralgebraprogramm ist es nicht schwer, diese ebene Kurve zu zeichnen, indem man einige Werte berechnet: Da ja aus $x^3 - z^2 = 0$ folgt, dass $z = \pm\sqrt{x^3}$, kann man hier einfach verschiedene positive Werte von x und 0 einsetzen und erhält die zugehörigen z -Koordinaten. Z.B.: $x = 0 \Rightarrow z = 0$, $x = 1 \Rightarrow z = \pm 1$, $x = 4 \Rightarrow z = \pm 2$. Diese Kurve ist in der Mitte zu sehen:



Allgemeiner bezeichnet man die Singularität der Flächen mit den Gleichungen

$$A_k^{+-}(x, y, z) = x^{k+1} + y^2 - z^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

als A_k^{+-} Singularitäten. Für $k = 1$ finden wir den Kegel, der einen gewöhnlichen Doppelpunkt als Singularität in $(0, 0, 0)$ hat und den wir weiter oben bereits betrachtet haben; für $k = 2$ ergibt sich die Cuspe, für höheres k erhalten wir weitere Singularitäten, die keine gewöhnlichen Doppelpunkte sind und bei denen die Spitze „immer spitzer“ wird — einfach mal in SURFER [?] oder SURFEX [?] ausprobieren!

2 Weltrekord-Flächen

Wir beschreiben nun einige der aktuellen Weltrekord-Flächen auf dem Gebiet der Flächen mit vielen Singularitäten, sowie deren oft faszinierende Geschichte und Geometrie. Wir beginnen mit den einfachsten Fällen vom Grad 1 und 2, auch wenn hier die Geometrie der Flächen, die mit den Singularitäten zusammenhängt, nicht so interessant ist wie bei den Flächen von höherem Grad. Ab Grad 3 und 4 werden wir dann auch Zusammenhänge zu anderen Bereichen der Geometrie kennen lernen, wie beispielsweise den platonischen Körpern und dem Goldenen Schnitt.

Wie schon in der Zusammenfassung angedeutet, kann man in manchen Fällen sogar zeigen, dass die aktuellen Weltrekorde nie mehr verbessert werden können. Dies ist derzeit für $d = 1, 2, \dots, 6$ der Fall. Nur ab Grad $d = 7$ ist also noch unklar, ob der aktuelle Weltrekord, 99, auch der bestmögliche ist. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick für manche d ; wie schon in der Zusammenfassung erwähnt, bezeichnet dabei $\mu(d)$ die maximal mögliche Anzahl von Singularitäten auf einer Fläche vom Grad d :

d	1	2	3	4	5	6	7	8	d
$\mu(d) \geq$	0	1	4	16	31	65	99	168	$\approx \frac{5}{12}d^3$
$\mu(d) \leq$	0	1	4	16	31	65	104	174	$\approx \frac{4}{9}d^3$

Zu dieser Tabelle müssen wir noch bemerken, dass $\mu(d)$ genauer gesagt die maximal mögliche Anzahl **komplexer Singularitäten** einer algebraischen Fläche, deren definierendes Polynom auch komplexe Koeffizienten haben darf (siehe Abschnitt 1.2.6), bezeichnet. Da aber derzeit in keinem der aufgeführten Fälle eine bessere obere oder untere Schranke für eine reelle Variante $\mu_{\mathbb{R}}(d)$ von $\mu(d)$ bekannt ist, gehen wir hier nicht weiter auf die Unterscheidung zwischen $\mu_{\mathbb{R}}(d)$ und $\mu(d)$ ein. Insbesondere haben alle Flächen, die die in der Tabelle angegebenen unteren Schranken realisieren, ausschließlich reelle Singularitäten, so dass es uns recht leicht möglich ist, diese Flächen zu visualisieren!

Eine wesentlich ausführlichere und mathematisch fundiertere Darstellung des Themas *Flächen mit vielen Singularitäten* liefert die Dissertation des Autors [Labs 2005]. Hier versuchen wir, die Besonderheiten der jeweiligen Mathematik und Geometrie der Konstruktionen noch anschaulicher und detaillierter als in der angegebenen Arbeit zu erläutern.

2.1 Ebenen

Die Geometrie einer Ebene (Flächen vom Grad 1) ist nicht besonders faszinierend. Trotzdem gehen wir hier auf diese einfachsten Flächen detailliert

ein, da man an diesem Beispiel auf sehr elementare Weise nachrechnen kann, dass diese Flächen gar keine Singularitäten haben können.

Beginnen wir mit der Gleichung einer Ebene:

$$E: \quad ax + by + cz + d = 0,$$

wobei a, b, c, d für jede Ebene gewisse feste Werte annehmen. Im ersten Abschnitt haben wir gesehen, dass eine Singularität einer Fläche ein Punkt ist, in dem sowohl die Flächengleichung als auch deren partielle Ableitungen erfüllt sind. Berechnen wir die letzteren, so ergibt sich:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = c.$$

Damit alle gleichzeitig verschwinden, muss sowohl $a = 0$, als auch $b = 0$ und $c = 0$ gelten. Soll die Ebene E also eine Singularität besitzen, so hat sie die Form: $d = 0$. Eine solche Ebene hat aber nur dann Punkte, wenn die Konstante d eben gerade 0 ist. Dann ist die verbleibende Gleichung der Ebene aber $0 = 0$, was gar keine Bedingung an die Variablen x, y, z darstellt und daher den ganzen Raum beschreibt und nicht etwa eine Ebene. Wir haben also gerade bewiesen, dass eine Ebene keine Singularität haben kann:

Satz 1. *Eine Ebene hat keine Singularität, insbesondere: $\mu(1) = 0$.*

2.2 Quadriken

Flächen vom Grad 2 heißen Quadriken. Schon für diese ist es nicht mehr so einfach, elementar nachzurechnen, wie viele Singularitäten sie haben können, obwohl schon die Griechen vor über 2000 Jahren die meisten ihrer Eigenschaften bereits verstanden. Für eine sehr anschauliche Darstellung von wesentlich mehr Eigenschaften als wir hier darstellen können, siehe [Hilbert and Cohn-Vossen 1952].

Heutzutage lernt man Quadriken als Mathematik-Student üblicherweise in der sogenannten linearen Algebra kennen: Das nahezu vollständige Verständnis der Quadriken bildet einen der Höhepunkte des ersten Studienjahres. Wir geben hier nur das dort bewiesene Ergebnis an:

Satz 2 (Klassifikation der Quadriken). *Durch Drehung und/oder Verschiebung lässt sich jede Quadrik im \mathbb{R}^3 in eine der folgenden drei Formen überführen:*

1. **Fall:** $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$,

2. **Fall:** $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$,

3. **Fall:** $ax^2 + by^2 - z = 0$,

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gewisse Konstanten sind. Erlaubt man auch Stauchungen und Streckungen, so kann man erreichen, dass $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$.

Die wichtigsten Fälle dieser Klassifikation sind in Abbildung 7 zu sehen. In den meisten Fällen kann man die Geometrie der Flächen ausgehend von deren Gleichung recht gut verstehen. Beispielsweise, indem man eine der drei Variablen auf einen festen Wert setzt; dies gibt dann eine ebene Kurve vom Grad zwei, also entweder eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel, zwei Geraden u.ä. — einfach einmal versuchen!

Anhand der Bilder zur Klassifikation kann man schon erahnen, dass eine Quadrik höchstens eine isolierte Singularität haben kann, doch wir können dies auch mit Hilfe des obigen Klassifikationssatzes recht leicht nachweisen:

Satz 3. *Eine Quadrik hat höchstens eine isolierte¹ Singularität. Diese ist dann ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Insbesondere:*

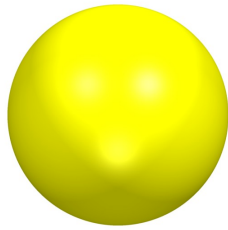
$$\mu(2) = 1.$$

Beweis: Wegen des Satzes 2 zur Klassifikation der Quadriken müssen wir uns nur die drei dort angegebenen Fälle anschauen, jeweils die partiellen Ableitungen berechnen und dann die möglichen Singularitäten bestimmen. Wir betrachten hier nur die Fälle des Satzes 2 mit $a, b, c \neq 0$:

- 1. Fall:** Im ersten Fall sind die partiellen Ableitungen $2ax, 2by, 2cz$. Für $a, b, c \neq 0$ können diese nur dann gleichzeitig null sein, wenn $x = y = z = 0$. Der Punkt $(0, 0, 0)$ ist tatsächlich ein Punkt der Quadrik, da $a \cdot 0^2 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0^2 = 0$ und daher die einzige Singularität der Quadrik. Wie wir oben gesehen haben ist diese ein gewöhnlicher Doppelpunkt.
- 2. Fall:** Auch im zweiten Fall sind die partiellen Ableitungen $2ax, 2by, 2cz$. Für $a, b, c \neq 0$ können diese wieder nur dann gleichzeitig null sein, wenn $x = y = z = 0$. Der Punkt $(0, 0, 0)$ ist aber kein Punkt der Quadrik, da $a \cdot 0^2 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0^2 = 0 \neq 1$. In diesem Fall hat die Quadrik also keine Singularität.
- 3. Fall:** Im letzten Fall sind die partiellen Ableitungen $2ax, 2by, -1$. Die partielle Ableitung nach z ist konstant -1 und kann also nie 0 werden, so dass diese Quadriken auch keine Singularität haben können.

Insgesamt kann also nur im 1. Fall eine Singularität auftreten. □

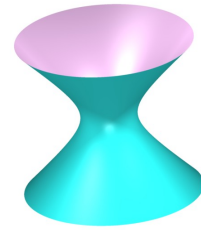
¹ Eine *isolierte Singularität* ist eine Singularität, für die eine Umgebung existiert, die keine weitere Singularität enthält. In diesem Artikel können wir leider auf Details nicht eingehen. Nur ein Beispiel: $f: z^2 = 0$ definiert zwar die gleiche Ebene wie $g: z = 0$, doch obwohl g nur glatte Punkte hat, besteht f nur aus singulären Punkten. Alle Punkte von f sind nicht-isolierte Singularitäten.



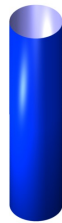
Sphäre (Kugelfläche)
(2. Fall: $a, b, c = 1$)



Ellipsoid
(2. Fall: $a, b, c > 0$)



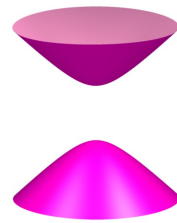
Einschaliger Hyperboloid
(2. Fall: $a, c > 0, b < 0$)



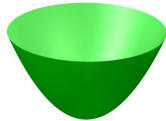
(Elliptischer) Zylinder
(2. Fall: $a, b > 0, c = 0$)



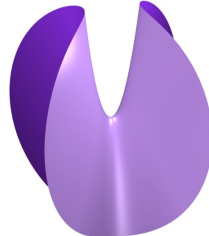
Hyperbolischer Zylinder
(2. Fall: $a > 0, b < 0, c = 0$)



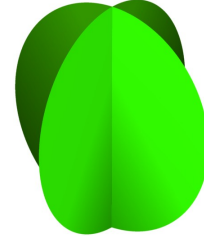
Zweischaliger Hyperboloid
(2. Fall: $a > 0, b, c < 0$)



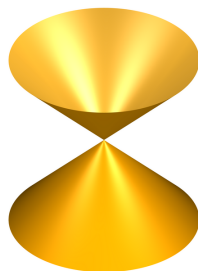
Elliptischer Paraboloid
(3. Fall: $a, b > 0$)



Hyperbolischer Paraboloid
(3. Fall: $a > 0, b < 0$)



Zwei Ebenen
(1. Fall: $a > 0, b < 0, c = 0$)



Doppelkegel
(1. Fall, $a, b > 0, c < 0$)



Ein Punkt
(1. Fall, $a, b, c > 0$)



Eine Gerade
(1. Fall, $a, b > 0, c = 0$)

Abbildung 7: Die Klassifikation der Quadriken.

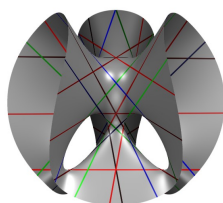
2.3 Kubische Flächen und Platonische Körper

Für Ebenen konnten wir noch recht leicht per Hand nachrechnen, dass diese Flächen keine Singularitäten haben können. Für Quadriken mussten wir schon ein Resultat aus dem ersten Studiensemester zu Rate ziehen, um nachzuweisen, dass diese Flächen höchstens eine Singularität haben können.

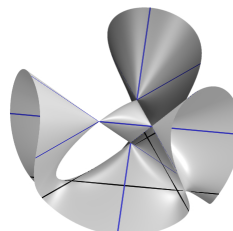
Für Kubiken (also Flächen, die durch ein Polynom vom Grad 3 beschrieben werden) ist die Situation nach komplizierter. Um hier die Frage nach der möglichen Anzahl von Singularitäten beantworten zu können, müssen wir schon auf ein Resultat, das man erst in einer Spezialvorlesung zur algebraischen Geometrie bespricht, zurückgreifen — das allerdings die Mathematiker des 19. Jahrhunderts auch bereits kannten.

2.3.1 Zur Geschichte der kubischen Flächen

Die ersten interessanten Resultate zu kubischen Flächen fanden die beiden Briten George Salmon und Arthur Cayley 1849 in einem Briefwechsel heraus: Auf jeder kubischen Fläche, die keine Singularitäten hat, liegen genau 27 Geraden (links in der Abbildung unten) — und wenn man die Flächen so verändert, dass Singularitäten auftreten, so fallen manche der Geraden übereinander (rechtes Bild).



Die Clebsch-Kubik hat keine Singularität und 27 Geraden.



Die Cayley-Kubik hat 4 Singularitäten und nur 9 verschiedene Geraden.

Dies mag auf den ersten Blick sehr erstaunlich erscheinen, da kubische Flächen doch sehr geschwungen und gar nicht gerade erscheinen, doch man kann dies tatsächlich beweisen; unter der Annahme, dass wenigstens eine Gerade auf einer solchen Fläche liegt, ist es sogar nicht sehr schwer, die tatsächliche Anzahl zu bestimmen.

Beeindruckend ist, dass kubische Flächen immer noch Objekt der Forschung sind, obwohl man schon so vieles über sie weiß; das liegt zum großen Teil daran, dass man kleine Ausschnitte der kubischen Flächen heutzutage dazu benutzt, um noch kompliziertere Objekte anzunähern. Dies wird beispielsweise im Bereich des Computer Aided Design eingesetzt, da kubische Flächen nämlich viele weitere praktische Eigenschaften besitzen, wie z.B. die

Tatsache, dass sie parametrisierbar sind. Dies können wir hier leider nicht vertiefen, wir möchten nur im nächsten Abschnitt ein kleines Detail dieser sehr umfassenden Theorie der kubischen Flächen beleuchten, nämlich die Frage nach der maximalen Anzahl von Singularitäten auf ihnen. Die Webseite [Labs and van Straten 2000] gibt einen umfassenden Überblick über alle möglichen Gestalten kubischer Flächen, s. auch [Holzer and Labs 2006].

2.3.2 Eine obere Schranke für $\mu(d)$

Schon im 19. Jahrhundert haben Mathematiker gegebenen algebraischen Flächen andere algebraischen Flächen zugeordnet, die in besonderer Beziehung zu ihnen stehen. Eine solche zugeordnete Fläche ist die sogenannte **duale Fläche**. Diese hat sehr viel mit der ursprünglichen Fläche zu tun; insbesondere ist nämlich die duale Fläche der dualen Fläche wieder die ursprüngliche Fläche! Zwar können wir das Konzept der dualen Fläche hier nicht erläutern, doch wir können zumindest eine Formel für deren Grad anwenden lernen: Ist der Grad d einer gegebenen algebraischen Fläche f wenigstens $d \geq 3$ und bezeichnen wir den Grad der dualen Fläche von f mit d^* , so gilt:

$$d^*(f) \leq d(d-1)^2 - 2\mu(f),$$

wobei $\mu(f)$ die Anzahl der isolierten Singularitäten von f ist. Da bekannt ist, dass duale Flächen von Quadriken wieder Quadriken sind, gilt $d^*(f) \geq 3$, falls $d \geq 3$. Setzen wir dies in die obige Ungleichung ein, so erhalten wir nach Umstellen die folgende obere Schranke für die Anzahl $\mu(f)$ von Singularitäten auf f und da f beliebig vom Grad d war auch eine obere Schranke für $\mu(d)$:

Satz 4 (19. Jahrhundert, vielleicht von G. Salmon). *Für die maximal mögliche Anzahl $\mu(d)$ von Singularitäten auf einer Fläche vom Grad $d \geq 3$ gilt:*

$$\mu(d) \leq \frac{1}{2}(d(d-1)^2 - 3).$$

Setzen wir in diese Formel einige Werte für $d \geq 3$ ein, so erhalten wir beispielsweise: $\mu(3) \leq 4$, $\mu(4) \leq 16$, $\mu(5) \leq 34$. Wir werden später sehen, dass tatsächlich $\mu(4) = 16$ gilt, dass aber die wahre Schranke im Grad 5 niedriger als 34 liegt. Doch nun zunächst zurück zum Grad 3.

2.3.3 Die Cayley–Kubik mit vier Singularitäten

Wir haben eben gesehen, dass eine kubische Fläche höchstens vier Singularitäten haben kann, doch gibt es wirklich eine Fläche, die diese Schranke erreicht? Ja, es gibt sie tatsächlich; zu Ehren eines Mathematikers, der viel über kubische Flächen gearbeitet hat, wird sie heute oft **Cayley–Kubik** genannt, obwohl der Schweizer Ludwig Schläfli 1863 der erste war, der kubische Flächen detailliert auf deren Singularitäten untersucht hat.

Eine besonders symmetrische Gleichung einer kubischen Fläche mit der maximal möglichen Anzahl von $\mu(3) = 4$ Singularitäten erhält man z.B., indem man in der Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 0$ mit dem Hauptnenner durchmultipliziert und $w = 1 - x - y - z$ setzt:

$$\text{Cay: } yzw + xzw + xyw + xyz = 0, \quad w = 1 - x - y - z.$$

Eine gute Übungsaufgabe für den Leser ist es, nachzuprüfen, dass diese Fläche tatsächlich wie behauptet genau vier Singularitäten hat. Dies sind übrigens die vier Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$. Das liefert:

Satz 5 (Mitte des 19. Jahrhunderts). *Eine kubische Fläche kann maximal vier Singularitäten besitzen:*

$$\mu(3) = 4.$$

2.3.4 Die Cayley–Kubik und Tetraeder-Symmetrie

Nicht erstaunen sollte hierbei, dass man nach Vertauschen der Koordinaten eines dieser Punkte wiederum eine der Singularitäten erhält — schließlich bleibt beim Vertauschen von x, y, z in der Gleichung der Fläche Cay die Gleichung vollständig erhalten. Man sagt in einem solchen Fall, dass die Gleichung *invariant* unter den Vertauschungen ist. Betrachten wir diese Vertauschungen etwas genauer; es sind folgende fünf:

$\alpha :$	$\beta :$	$\gamma :$	$\delta :$	$\eta :$
$x \mapsto y$	$x \mapsto y$	$x \mapsto z$	$x \mapsto z$	$x \mapsto x$
$y \mapsto x$	$y \mapsto z$	$y \mapsto y$	$y \mapsto x$	$y \mapsto z$
$z \mapsto z$	$z \mapsto x$	$z \mapsto x$	$z \mapsto y$	$z \mapsto y$

Zählen wir die „Vertauschung“ ι , die gar keine Vertauschungen vornimmt, die also x auf x , y auf y und z auf z abbildet, hinzu, so haben wir insgesamt 6 Vertauschungen. Dies ist kein Zufall, da man leicht nachweisen kann, dass es tatsächlich genau $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ Vertauschungen von n verschiedenen Buchstaben gibt: Für den ersten der Buchstaben hat man nämlich n mögliche Bild-Buchstaben zur Auswahl, für den nächsten noch $n-1$, dann noch $n-2$ usw.

Vertauschungen haben den Vorteil, dass man zwei beliebige Vertauschungen α und β einer gewissen Menge von Buchstaben auch hintereinander ausführen kann (geschrieben: $\beta \circ \alpha$, gesprochen: α nach β) und insgesamt wiederum eine Vertauschung erhält. AuSSerdem kann man offenbar jede Vertauschung α wieder rückgängig machen mit der sogenannten dazu *inversen Vertauschung* α^{-1} . Schließlich gilt noch $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ für drei beliebige Vertauschungen. Eine Menge mit all diesen Eigenschaften heiSSt **Gruppe**; die Vertauschungen einer festen Menge von n verschiedenen Buchstaben

bilden demnach eine Gruppe und zwar die sogenannte *symmetrische Gruppe auf n Buchstaben*, kurz bezeichnet mit S_n .

Am obigen Beispiel der Gruppe der Vertauschungen, unter denen die Gleichung der Fläche Cay invariant bleibt, können wir dies alles sehr konkret verstehen: Wenden wir zunächst α auf die drei Variablen (x, y, z) an, so tauschen x und y ihren Platz, (y, x, z) ; wenden wir nochmals α an, so sind wir wieder bei der ursprünglichen Reihenfolge angekommen: (x, y, z) , d.h. $\alpha = \alpha^{-1}$ in diesem Fall. Das gilt für β nicht, denn $\beta(x, y, z) = (y, z, x)$ und $\beta(y, z, x) = (z, x, y)$; schließlich gibt aber $\beta(z, x, y) = (x, y, z)$, d.h. dreifaches Anwenden von β ist nicht zu unterscheiden vom Nichtstun, also $\beta \circ \beta \circ \beta = \iota$. Man kann leicht überprüfen, dass wir durch mehrfaches Hintereinanderausführen von α und β tatsächlich alle sechs Vertauschungen $\alpha, \dots, \eta, \iota$ erhalten. Man sagt dann, dass α und β die Gruppe *erzeugen*.

Ersetzen wir nun in der obigen Gleichung von Cay die x, y, z, w durch gewisse Ebenen $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$, so kann man sogar erreichen, dass die Gleichung Cay invariant unter beliebigen Vertauschungen der vier „Buchstaben“ $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ bleibt, nämlich, wenn $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ die vier Seitenflächen eines regelmässigen Tetraeders beschreiben.

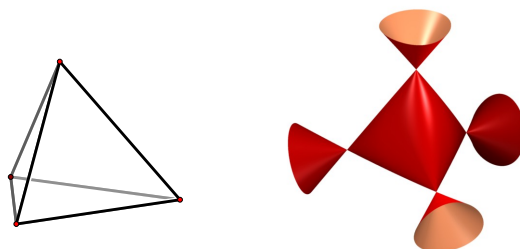


Abbildung 8: Ein regelmässiger Tetraeder und die tetraeder-symmetrische Version der Cayley-Kubik.

Diese bilden dann insgesamt eine Gruppe von $4! = 24$ Vertauschungen, unter denen Cay invariant bleibt. Betrachten Sie die resultierende tetraeder-symmetrische Fläche doch gleich mal in SURFER [?] oder SURFEX [?] (s. auch Abb. 8), indem Sie wählen:

$$\tilde{x} = 1 - z - \sqrt{2}x, \quad \tilde{y} = 1 - z + \sqrt{2}x, \quad \tilde{z} = 1 + z + \sqrt{2}y, \quad \tilde{w} = 1 + z - \sqrt{2}y.$$

Natürlich können Sie auch hier die Koordinaten der Singularitäten leicht berechnen, auch wenn die Rechnungen vielleicht etwas langwierig werden. Wegen der gewählten Tetraeder-Symmetrie sollten sich dabei gerade die 4 Ecken des Tetraeders mit den Seitenflächen $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ ergeben.

Die weiteren Platonischen Körper lassen sich bei kubischen Flächen nicht auf ähnliche Weise zur Konstruktion einsetzen. Da einige dieser seit mehr

als 2000 Jahren Mathematiker faszinierende Körper aber später auftauchen werden, geben wir kurz eine Übersicht in Abb. 9. Die Platonischen Körper haben noch viel tiefer liegende Beziehungen zu Singularitäten, auf die wir hier leider nicht eingehen können; siehe dazu beispielsweise [Greuel 1992].

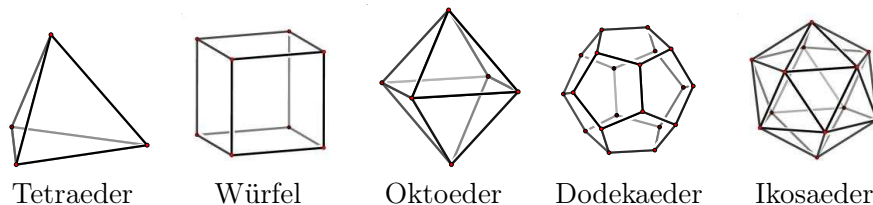


Abbildung 9: Die Platonischen Körper.

2.4 Kummer–Quartiken und nochmals Tetraeder

Bereits ein Jahr nachdem Ludwig Schläfli 1863 die kubischen Flächen bzgl. ihrer Singularitäten klassifiziert hatte, ermittelte Eduard Kummer die maximal mögliche Anzahl $\mu(4)$ von Singularitäten auf Flächen vom Grad 4 (sogenannten Quartiken). Wie wir in Satz 4 gesehen haben, gilt nämlich: $\mu(4) \leq 16$. Kummer bemerkte zunächst einmal, dass die sogenannte Fresnel-sche Wellenfläche tatsächlich 16 Singularitäten besitzt, dass also gilt:

Satz 6 (E. Kummer, 1864). *Eine Quartik kann maximal 16 Singularitäten besitzen:*

$$\mu(4) = 16.$$

Doch damit lieSS er es nicht bewenden; vielmehr studierte er sehr detailliert Quartiken, die diese maximale Anzahl von 16 Singularitäten haben. Er gab auch eine sehr schöne tetraeder-symmetrische Familie von Gleichungen solcher Flächen an:

$$\text{Ku}_\mu := (x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2)^2 - \lambda \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}\tilde{w}, \quad \lambda = \frac{3\mu^2 - 1}{3 - \mu^2}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

wobei $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ wieder die schon im Abschnitt über tetraeder-symmetrische Kubiken verwendeten Seitenflächen eines regelmässigen Tetraeders sind und μ eine reelle Zahl ist (für Abb. 10 wurde $\mu = 1.3$ gewählt).

Ein hervorragendes Buch über diese heutzutage nach Kummer benannten Quartiken mit der maximalen Anzahl von Singularitäten ist [Hudson 1905]. An der Tatsache, dass ganze Bücher über diese Flächen geschrieben wurden, sieht man, dass wir hier noch wesentlich mehr über sie sagen könnten; aus Platzmangel müssen wir aber leider auf die angegebene Literatur verweisen.



Abbildung 10: Eine Kummer–Quartik mit 16 gewöhnlichen Doppelpunkten.

2.5 Togliatti–Quintiken, 5–Ecke und der Goldene Schnitt

Der Italiener Eugenio Giuseppe Togliatti bewies bereits im Jahr 1937, dass es eine Fläche vom Grad 5 (daher der Name Quintik) mit genau 31 Singularitäten gibt — damals Weltrekord!

Da die obere Schranke in Satz 4 wie schon erwähnt nur beweist, dass es nicht mehr als 34 Singularitäten auf einer Quintik geben kann und da auch in der Folgezeit zunächst niemand eine wesentlich bessere obere Schranke finden konnte, suchten Geometer jahrzehnte lang nach einer Fläche vom Grad 5 mit wenigstens 32 Singularitäten, bis schließlich 1980 der Franzose Arneau Beauville durch eine interessante Beziehung zur Codierungstheorie zeigen konnte, dass eine Quintik nicht mehr als 31 Singularitäten besitzen kann. Das heißt also, dass Togliattis Weltrekord niemals mehr verbessert werden kann! Es gilt also:

Satz 7 (E.G. Togliatti 1937, A. Beauville 1980). *Eine Quintik kann maximal 31 Singularitäten besitzen:*

$$\mu(5) = 31.$$

Unglücklicherweise ist Togliattis Konstruktion nicht so leicht zu visualisieren, so dass wir für unsere Abbildung 11 auf eine Konstruktion von Wolf Barth aus den 1990igern einer Fläche zurückgreifen, die ebenfalls 31 gewöhnliche Doppelpunkte liefert: Ähnlich zur Konstruktion der tetraeder-symmetrischen Cayley–Kubik mag es natürlich erscheinen, einen Platonischen Körper auch hier zu verwenden. Da es aber keinen Platonischen Körper gibt, der entweder genau fünf Seitenflächen oder genau fünf Symmetrieebenen hat, ist nicht so klar, wie man so eine Fläche vom Grad 5 auf diese Weise konstruieren könnte. Daher besitzt die abgebildete Quintik mit 31 Singularitäten weniger Symmetrie, nämlich die Symmetrie eines ebenen Fünfecks, d.h. unter allen Spiegelungen in der x, y -Ebene, die ein regelmäßiges ebenes Fünfeck fest

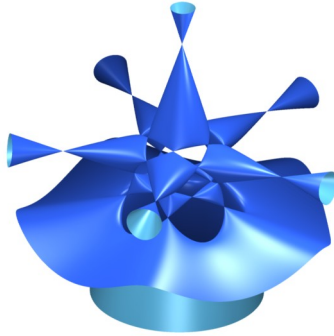


Abbildung 11: Barths Togliatti–Quintik mit 31 gewöhnlichen Doppelpunkten.

lassen, bleibt auch Barths Togliatti–Quintik fest. Anhand von Abb. 12 kann man sich leicht überlegen, dass die Gruppe aller Vertauschungen der Punkte der Ebene, die das Fünfeck festlassen, genau aus 10 Vertauschungen besteht, nämlich fünf Drehungen (wobei wir die Drehung um 0° mitzählen) sowie fünf Spiegelungen.

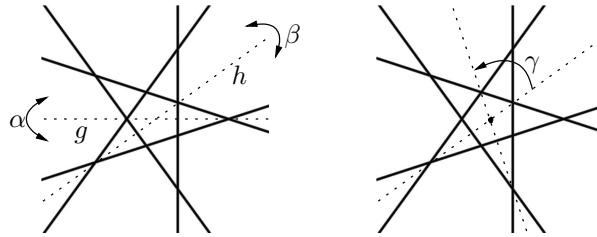


Abbildung 12: Spiegelungen und Drehungen, die ein regelmässiges Fünfeck fest lassen: α ist die Spiegelung an der Geraden g , β jene an h und γ ist die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ$.

Die Gleichung der oben abgebildeten Quintik ist nicht einfach zu finden; Barth startete mit einer Familie von Gleichungen, die von drei Parametern a, b, d abhängt, nämlich:

$$\text{Bar}_{a,b,d} := P - az \cdot Q^2,$$

wobei P ein Polynom vom Grad 5 und Q eine gewisse Quadrik ist, und zwar:

$$\begin{aligned} P &:= \prod_{j=0}^4 \left(\cos\left(\frac{2\pi j}{5}\right)x + \sin\left(\frac{2\pi j}{5}\right)y - 1 \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(x^5 - 5x^4 - 10x^3y^2 - 10x^2y^2 + 20x^2 \right. \\ &\quad \left. + 5xy^4 - 5y^4 + 20y^2 - 16 \right), \\ Q &:= x^2 + y^2 + bz^2 + z + d. \end{aligned}$$

Durch geometrische und algebraische Argumente fand Barth schließlich Werte für a, b, d , die tatsächlich eine Fläche mit 31 gewöhnlichen Doppelpunkten liefern:

$$a = -\frac{5}{32}, \quad b = -\frac{5 - \sqrt{5}}{20}, \quad d = -(1 + \sqrt{5}).$$

Nr. 23 auf der Webseite [Bothmer and Labs 2006] (www.Calendar.AlgebraicSurface.net) zeigt einen Film, bei dem einige Werte für a und b durchlaufen werden, bis schließlich jene Werte erreicht werden, für die sich die 31 Singularitäten ergeben.

Die Zahl d taucht hier nicht zufällig auf; vielmehr hat sie sehr viel mit dem sogenannten **Goldenen Schnitt** zu tun: Eine Teilung im Goldenen Schnitt liegt vor, wenn sich die grössere Teilstrecke zur ganzen Strecke verhält, wie die kleinere Teilstrecke zur grösseren. Ist die Länge der ganzen Strecke 1, so

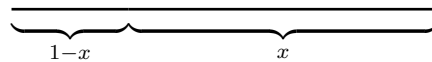


Abbildung 13: Der Goldene Schnitt x erfüllt: $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$.

ergibt sich (s. auch Abb. 13):

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{1-x}{x} \\ \Leftrightarrow 0 &= x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)\left(x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right) \\ \Leftrightarrow x &\in \left\{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right\}. \end{aligned}$$

Da die Länge x einer Strecke nicht negativ sein kann, finden wir als eindeutige Lösung: $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Bemerkenswert an dieser Zahl ist beispielsweise auch, dass

$$\frac{1}{x} = x + 1,$$

wie sich unmittelbar aus der definierenden Gleichung ergibt. Geometrisch taucht der Goldene Schnitt bei Fünfecken auf, so dass es nicht verwundert, dass der Parameter d , den Barth fand auch damit zusammen hängt: Man kann nämlich recht leicht nachweisen, dass sich die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks im Goldenen Schnitt teilen (Abb. 14). In dieser Abbildung gilt nämlich — da die Dreiecke ABC und ADC ähnlich sind — für die Streckenlängen zwischen diesen Punkten das Verhältnis:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}.$$

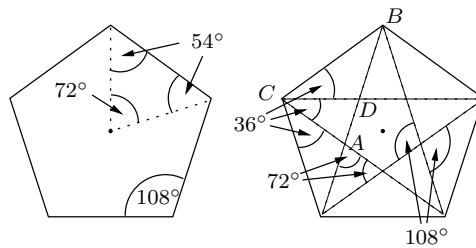


Abbildung 14: Die Diagonalen des regelmässigen Fünfecks schneiden sich im Goldenen Schnitt.

AuSSerdem ist $|AD| = |AB| - |AC|$ und $|AC| = |BD|$; wir erhalten somit:

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|AB| - |BD|}{|BD|}.$$

Insgesamt haben Wir also bewiesen, dass der Punkt D tatsächlich die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt. Es verwundert also nicht, dass in Barths Konstruktion einer Quintik mit 31 Singularitäten, die ja Fünfecke und die Fünfeck-Symmetrie benutzt, der Goldene Schnitt auch bei einem der drei Parameter, nämlich d , wieder in Erscheinung tritt:

$$d = -2 \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = -2 \cdot \tau,$$

wobei $\tau := x + 1 = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ wie oben den Kehrwert des Goldenen Schnittes bezeichnet.

2.6 Die ikosaeder-symmetrische Barth-Sextik

Die Barth-Sextik hat eine ganz besondere Geschichte. Schon seit den frühen 1980ern war nämlich bekannt, dass Flächen vom Grad 6 nicht mehr als 66 Singularitäten haben können. 1982 erschien auSSerdem ein Artikel, in dem die Autoren meinten nachzuweisen, dass Sextiken, die im Wesentlichen von der Form $P - az \cdot Q^2 = 0$ sind, höchstens 64 haben könnten. Mathematische Artikel, die in anerkannten Zeitschriften erscheinen (wie der eben erwähnte), enthalten aber auch manchmal Fehler — und das war hier tatsächlich der Fall. Denn 1996 konstruierte Wolf Barth eine Fläche vom Grad sechs, die genau die oben angegebene Form hat, und die 65 Singularitäten besitzt (siehe Abb. 15 und auch Nr. 6 auf der Webseite [Bothmer and Labs 2006], im Bild sieht man allerdings nur 50 der insgesamt 65 Singularitäten)!

Fast zeitgleich schafften es die beiden Mathematiker Jaffe und Ruberman auSSerdem zu beweisen, dass 66 Singularitäten nicht möglich sind, dass also auch Barths Weltrekord für immer unschlagbar sein wird:

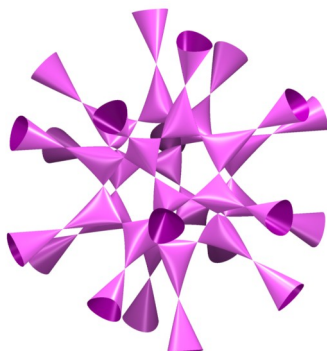


Abbildung 15: Die Barth–Sextik mit 65 gewöhnlichen Doppelpunkten.

Satz 8 (W. Barth 1996, D.B. Jaffe / D. Ruberman 1997). *Eine Sextik kann maximal 65 Singularitäten besitzen:*

$$\mu(6) = 65.$$

Schon am Bild kann man die Ikosaeder-Symmetrie von Barths Konstruktion erahnen. Die genaue Gleichung der Fläche ist folgende:

$$\text{Bar}_{65}: P_6 - \alpha K^2 = 0,$$

wobei P_6 für die sechs Ebenen durch den Ursprung steht, die orthogonal zu den sechs Diagonalen des regulären Ikosaeders liegen und die die Gleichung $P_6 := (\tau^2 x^2 - y^2)(\tau^2 y^2 - z^2)(\tau^2 z^2 - x^2)$ mit $\tau := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ erfüllen. Außerdem beschreibt $K := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ die Sphäre mit Radius 1 und der Parameter α ist $\alpha := \frac{1}{4}(2\tau + 1) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$ (siehe Abb. 16). Interessanter Weise taucht hier also gleich an mehreren Stellen der Kehrwert τ des sogenannten Goldenen Schnittes auf, der auch schon bei der Quintik mit 31 Singularitäten relevant war.

Anhand der Gleichung kann man verstehen, dass die gesamte Fläche invariant unter der gesamten Symmetriegruppe des Ikosaeders ist, da dies natürlich für die sechs Ebenen P_6 aber auch für die Sphäre K gilt. Für andere Werte von α ist die Fläche zwar auch ikosaeder-symmetrisch, hat aber weniger Singularitäten: einfach mal in SURFER oder SURFEX ausprobieren!

2.7 Eine Septik mit 99 Singularitäten und endliche Zahlensysteme

Ähnlich wie bei der Quintik kann man im Fall von Flächen vom Grad 7 nicht auf naheliegende Weise einen der Platonischen Körper ausnutzen, um eine Fläche mit vielen Singularitäten zu konstruieren. Daher wird man zunächst

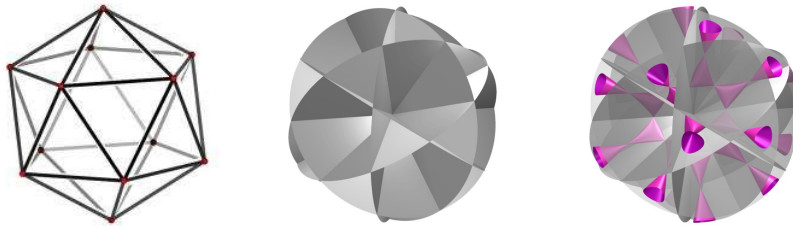


Abbildung 16: Zur Konstruktion von Barths Sextik: links ein regelmässiger Icosaeder, in der Mitte seine 6 Symmetrie-Ebenen und rechts diese Ebenen gemeinsam mit der Barth-Sextik in einem Bild.

einmal versuchen, wiederum ein regelmässiges n -Eck (hier passender Weise ein 7-Eck) zu verwenden, doch leider führt dies zunächst auf einen noch viel zu grossen Suchraum.

Um in diesem riesigen Suchraum den einen kleinen Punkt (oder die sehr wenigen Punkte) zu finden, der eine Septik mit sehr vielen Singularitäten liefert, nutzte der Autor dieses Artikels in seiner Dissertation [Labs 2005] aus, dass man algebraische Flächen auch über anderen Zahlensystemen betrachten kann als den reellen Zahlen. Wir haben schon in Abschnitt 1.2.6 gesehen, dass man algebraische Flächen auch über den komplexen Zahlen studieren kann. Jetzt gehen wir auf eine weitere Art von Zahlensystemen ein, nämlich die endlichen Zahlensysteme. Solche endlichen Zahlensysteme kennen wir alle von der Uhr:

$$23 \text{ Uhr} + 3 \text{ Stunden} (= 26 \text{ Uhr}) = 2 \text{ Uhr}.$$

Besonders gut funktioniert das Rechnen mit solchen endlichen Zahlensystemen, wenn wir genau p Zahlen verwenden, wobei p eine Primzahl ist. Die dabei verwendeten Zahlen sind also:

$$0, 1, 2, \dots, p - 1$$

und es gilt:

$$p = 0,$$

genauso wie bei der Uhr $24 \text{ Uhr} = 0 \text{ Uhr}$ ist. Ein solches Zahlensystem wird üblicherweise mit \mathbb{F}_p bezeichnet und heisst **endlicher Körper mit p Elementen**. In \mathbb{F}_p kann man nicht nur addieren, sondern auch hervorragend multiplizieren und dividieren. Bei der Uhr ($24 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ist keine Primzahl!) hat man im Gegensatz dazu das Problem, dass

$$3 \text{ Uhr} \cdot 8 = 24 \text{ Uhr} = 0 \text{ Uhr};$$

in \mathbb{F}_p kann nie passieren, dass das Produkt zweier von Null verschiedener Zahlen Null ergibt, was das Rechnen erheblich vereinfacht; auSSerdem kann

man daher durch jede der endlich vielen Zahlen (außer durch 0) dividieren. Rechnungen in endlichen Körpern haben zahllose Anwendungen; insbesondere sind in der letzten Zeit Codierungstheorie und Kryptographie wichtig geworden — kein Handy-Telefonat wäre ohne endliche Körper möglich.

Wir können das hier nicht weiter vertiefen, möchten aber wenigstens ein Beispiel einer Kurve über einem endlichen Körper betrachten, und zwar den Kreis $k: x^2 + y^2 = 1$ über dem Körper \mathbb{F}_3 , in dem nur die drei Zahlen 0, 1, 2 existieren. In \mathbb{F}_3 gilt: $1 + 1 + 1 = 0$, also $1 + 2 = 0$, so dass wir für 2 auch -1 schreiben könnten. Wir suchen nun alle Punkte (a, b) mit Koordinaten im endlichen Körper \mathbb{F}_3 , die die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ erfüllen. Glücklicherweise gibt es nur $3 \cdot 3 = 9$ verschiedene Punkte (a, b) mit Koordinaten in \mathbb{F}_3 .

- Beginnen wir mit dem Punkt $(0, 0)$; es gilt: $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$, d.h. $(0, 0)$ ist kein Punkt auf dem Kreis k .
- Nun der Punkt $(1, 0)$: Es gilt $1^2 + 0^2 = 1$, d.h. $(1, 0)$ und natürlich auch $(0, 1)$ sind Punkte auf k .
- Nun zu $(2, 0)$: $2^2 + 0^2 = 4 = 1$, d.h. $(2, 0)$ und daher aus Symmetriegründen auch $(0, 2)$ sind Punkte auf k .
- Für $(1, 1)$ ergibt sich: $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$, d.h. $(1, 1)$ liegt nicht auf dem Kreis.
- Für $(2, 1)$ und $(1, 2)$ finden wir: $2^2 + 1^2 = 5 = 2 \neq 1$; diese beiden Punkte liegen also auch nicht auf k .
- Schließlich noch $(2, 2)$: $2^2 + 2^2 = 8 = 2 \neq 1$; dieser Punkt liegt auch nicht auf k .

Insgesamt liegen also von den 9 Punkten (a, b) mit Koordinaten in \mathbb{F}_3 die Punkte $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$ und $(0, 2)$ auf k , die anderen nicht. Wie man sieht ist das Finden von Lösungen über endlichen Körpern sehr einfach, weil man alle Möglichkeiten ausprobieren kann!

Auf ähnliche Weise und mit einigen weiteren algebraischen und geometrischen Argumenten hat der Autor dieses Artikels 2004 eine Fläche vom Grad 7 (Septik) mit 99 Singularitäten konstruiert unter Benutzung des Computeralgebra Programmes SINGULAR [DGPS 2012], dessen besondere Stärke in Anwendungen auf algebraische Geometrie und Singularitäten liegt.

Die Gleichung dieser Septik ist der Quintik mit 31 Singularitäten, die Barth konstruiert hat, recht ähnlich: Diese Fläche hat die Symmetrie eines regelmäßigen 7-Ecks; von „oben“ kann man dies besonders gut sehen (Abb. 18):

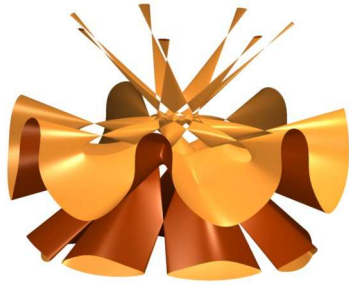


Abbildung 17: Eine Septik mit 99 gewöhnlichen Doppelpunkten.

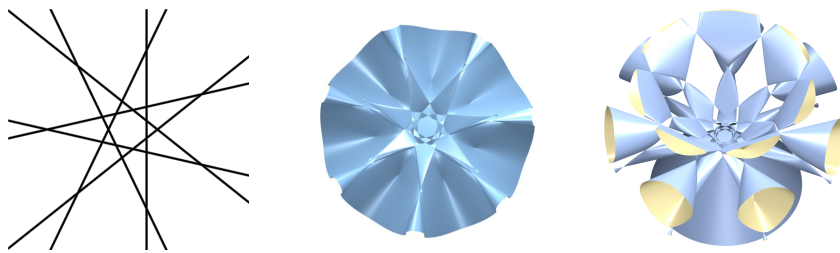


Abbildung 18: Ein regelmässiges 7-Eck, die Septik mit 99 Singularitäten, einmal von „oben“ gesehen und einmal eine schräge, etwas hereingezoomte Ansicht.

Die Gleichung der Septik mit 99 Singularitäten ist ein wenig länglich zu beschreiben. Sei zunächst α eine Lösung von:

$$7\alpha^3 + 7\alpha + 1 = 0. \quad (1)$$

Dann hat die Fläche S_α vom Grad 7 mit Gleichung $S_{99} := S_\alpha := P - U_\alpha$ genau 99 gewöhnliche Doppelpunkte und keine weiteren Singularitäten, wobei P und U_α folgendermaSSen definiert sind ($w = 1$):

$$\begin{aligned} P &:= x \cdot [x^6 - 3 \cdot 7 \cdot x^4 y^2 + 5 \cdot 7 \cdot x^2 y^4 - 7 \cdot y^6] \\ &\quad + 7 \cdot z \cdot [(x^2 + y^2)^3 - 2^3 \cdot z^2 \cdot (x^2 + y^2)^2 + 2^4 \cdot z^4 \cdot (x^2 + y^2)] - 2^6 \cdot z^7, \\ U_\alpha &:= (z + a_5 w) ((z + w)(x^2 + y^2) + a_1 z^3 + a_2 z^2 w + a_3 z w^2 + a_4 w^3)^2, \\ a_1 &:= -\frac{12}{7} \alpha^2 - \frac{384}{49} \alpha - \frac{8}{7}, & a_2 &:= -\frac{32}{7} \alpha^2 + \frac{24}{49} \alpha - 4, \\ a_3 &:= -4\alpha^2 + \frac{24}{49} \alpha - 4, & a_4 &:= -\frac{8}{7} \alpha^2 + \frac{8}{49} \alpha - \frac{8}{7}, \\ a_5 &:= 49\alpha^2 - 7\alpha + 50. \end{aligned}$$

Die Bedingung (1) hat genau eine reelle Lösung $\alpha_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_{\mathbb{R}} \approx -0.14010685, \quad (2)$$

und alle Singularitäten von $S_{\alpha_{\mathbb{R}}}$ sind auch reell. In Abb. 18 (rechtes Bild) sind allerdings einige der Singularitäten nicht im gezeigten Ausschnitt zu sehen, wegen des Zooms. Die Existenz der Gleichung, die der Autor 2004 gefunden hat, zeigt die eine Hälfte des folgenden Resultats; die andere Hälfte bewies Anfang der 1980er Jahre A.N. Varchenko:

Satz 9 (Labs 2004, Varchenko 1983). *Für die maximale Anzahl $\mu(7)$ von Singularitäten auf einer Septik gilt:*

$$99 \leq \mu(7) \leq 104.$$

99 Singularitäten sind derzeit Weltrekord für Flächen vom Grad 7; bisher ist aber kein Grund bekannt, aus dem es nicht sogar eine Septik mit 104 Singularitäten geben könnte; es mag daher sein, dass der Weltrekord des Autors dieses Artikels noch zu verbessern ist — also: viel Spaß beim Suchen nach einer Septik mit mehr als 99 Singularitäten!

Literatur

[Bothmer and Labs 2006] BOTHMER, H.-C. G.V. und O. LABS: *Geometrical Animations Advent Calendar 2006*. `Calendar.AlgebraicSurface.net`, 2006.

- [Greuel 1992] GREUEL, G.-M.: *Deformation und Klassifikation von Singularitäten und Moduln*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. Jubiläumstagung 1990, Seiten 177–238, 1992.
- [DGPS 2012] DECKER, W. und GREUEL, G.-M. und PFISTER, G. und SCHÖNEMANN, H.: *SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations*. www.singular.uni-kl.de.
- [Hilbert and Cohn-Vossen 1952] HILBERT, D. und S. COHN-VOSSEN: *Geometry and the Imagination*. Chelsea, New York, 1952.
- [Holzer and Labs 2006] HOLZER, S. und O. LABS: in: *M. Elkadi and B. Mourrain and R. Piene: Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, Kapitel *Illustrating the Classification of Real Cubic Surfaces*. Springer, 2006.
- [Hudson 1905] HUDSON, R.W.H.T.: *Kummer's Quartic Surface*. Cambridge University Press, 1905.
- [Labs 2005] LABS, O.: *Hypersurfaces with Many Singularities*. Doktorarbeit, Universität Mainz, 2005. Downloadable as PDF from www.OliverLabs.net.
- [Labs and van Straten 2000] LABS, O. und D. VAN STRATEN: *The Cubic Surface Homepage*. Cubics.AlgebraicSurface.net, 2000.
- [Greuel et al. 2012] GREUEL, G.-M. et al.: *SURFER — A Software for the Visualization of Real Algebraic Surfaces*. www.Imaginary-Exhibition.com/program/surfer.