

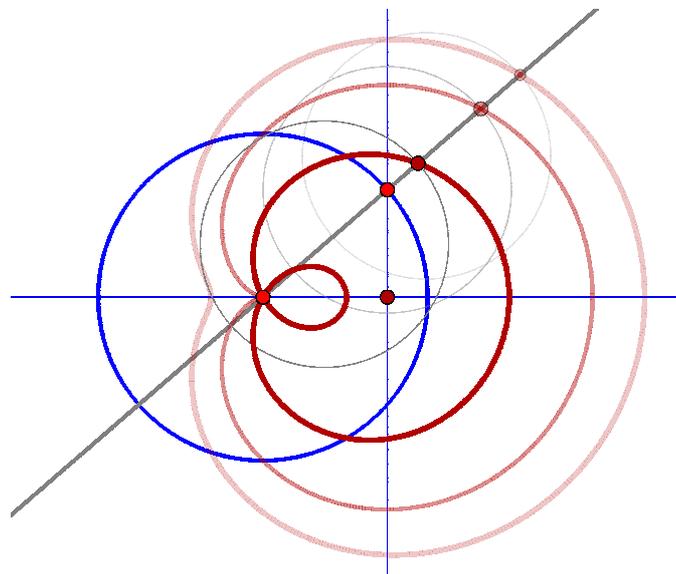
Oliver Labs

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen.

Skript zu einer zweistündigen Vorlesung im Rahmen der Reihe

Elementarmathematik vom höheren Standpunkt

gehalten an der Universität des Saarlandes
im Wintersemester 2007/08



Version vom 12. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	5
0.1	Zu den Übungsaufgaben und zur Klausur	5
0.1.1	Regelmäßig wiederkehrende Aufgabentypen	5
0.1.2	Ausführliche Hausaufgabe	6
0.1.3	Die Klausur	6
0.2	Dynamische Konstruktionen	6
0.2.1	Ein Beispiel: Höhen im Dreieck	6
0.2.2	Einige Anwendungen Dynamischer Geometrie	7
	Sätze entdecken	7
	Sätze intuitiv erfahren	7
0.2.3	Ein erstes Problem	8
0.2.4	Ein weiteres Problem: Stetigkeit — Pro und Kontra	8
	Pro Stetigkeit	8
	Kontra Stetigkeit	9
0.3	Ortskurven	10
0.3.1	Ein 4-Stab-Gelenk-Mechanismus	10
0.3.2	Eigenschaften von Ortskurven	11
0.3.3	Über die Mächtigkeit Dynamischer Geometrie	11
0.4	Automatisches Sätze-Erkennen und -Beweisen	11
1	Affine Geometrie	13
1.1	Affine Ebenen	13
1.2	Abbildungen der affinen Ebene	16
1.2.1	Automorphismen	16
1.2.2	Dilatationen	18
1.2.3	Translationen	19
1.3	Zwei Grundlegende Sätze der reellen affinen Geometrie	21
	Der Satz von Pappus in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$	21
	Der Satz von Desargues in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$	22
2	Projektive Geometrie	23
2.1	Die Projektive Ebene als Vervollständigung der Affinen	24
2.2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$	27
2.2.1	Definition von $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$	27

VIII INHALTSVERZEICHNIS

2.2.2	Das Sphärenmodell	29
2.2.3	Die Projektiven Sätze von Pappus, Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	30
2.3	Homogene Koordinaten für $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	31
2.3.1	Koordinaten für projektive Punkte	31
2.3.2	Koordinaten für projektive Geraden	32
2.3.3	Die reelle projektive Ebene	32
2.4	Topologie der reellen projektiven Ebene	35
2.4.1	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \text{Möbiusband} \cup \text{Kreisscheibe}$	35
2.4.2	Die Boy'sche Fläche	36
2.4.3	Kompaktheit	36
2.5	Reelle Kegelschnitte und Quadriken — eine Übersicht	37
2.5.1	Symmetrische Matrizen	37
2.5.2	Klassifikation von Quadriken	39
2.5.3	Der Satz von Bézout, Kegelschnitte durch fünf Punkte	46
	Parametrisierung von Kegelschnitten	47
	Einfache Fälle des Satzes von Bézout	48
	Kegelschnitte durch fünf Punkte	50
	Mehrfache Schnittpunkte von Kegelschnitten	50
2.6	Das Doppelverhältnis und der Satz von Pascal	51
2.6.1	Projektive Transformationen	51
2.6.2	Das Doppelverhältnis	51
2.6.3	Der Satz von Pascal	51
2.7	Projektive Dualität	51
2.7.1	Die duale projektive Ebene	52
2.7.2	Das Prinzip der Dualität	54
2.7.3	Anwendungen der Dualität	55
3	Dynamische Geometrie	57
3.0.4	Kontinuität versus Determinismus	57
3.0.5	Kontinuität in einem Dynamischen Geometrie System	60
	Tracing	60
	Complex Tracing	60
	Singularitäten	62
	Lokale und globale Konsistenz	62
	Hebbare Singularitäten	63
	Kontinuität beim Auftreten von Singularitäten	64
	Kontinuität und Intuition	66
3.0.6	Fazit	68
4	Über die Mächtigkeit Dynamischer Geometrie	69
4.1	Konstruierbarkeit von Punkten mit Zirkel und Lineal	69
4.2	Lösung einiger unmöglicher Aufgaben mittels Ortskurven	73
4.2.1	Würfelverdopplung mit der Konchoide des Nikomedes	73
4.2.2	Winkeldreiteilung mit der Konchoide des Nikomedes	76
4.2.3	Quadratur des Kreises mit der Quadratrix	76

4.3	Unlösbarkeit der klassischen Probleme für Zirkel und Lineal .	78
4.3.1	Winkeldreiteilung und Würfelverdopplung	78
4.3.2	Quadratur des Kreises	81
4.3.3	Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke	82
5	Überblick: Aktuelle Dynamische Geometrie Software	85
5.1	Veröffentlichen im Web — ein HTML-Crashkurs	86
5.2	Die einzelnen Programme	88
5.2.1	Cinderella 1.4	88
5.2.2	Euklid DynaGeo 3.0f	88
5.2.3	GeoGebra 3.0	88
5.2.4	GEONExT	89
5.2.5	Cabri II Plus	89
5.3	Tabellarische Übersicht	89
6	Erste Eigenschaften von Ortskurven	91
6.1	Eine Ortskurve als algebraische Kurve	92
6.2	Eine rational parametrisierbare Kurve	93
6.3	Tangenten und Singularitäten algebraischer Kurven	94
6.4	Erste Eigenschaften singulärer Punkte	96
6.4.1	Die Ordnung eines Punktes	96
6.4.2	Einige wichtige Typen von Singularitäten	98
	Tangenten in singulären Punkten	98
	Gewöhnliche Mehrfachpunkte	100
	Gewöhnliche Spitzen	101
6.5	Parametrisierbarkeit algebraischer Kurven	102
7	Automatisches Sätze-Erkennen und -Beweisen	107
7.1	Randomisiertes Beweisen	107
7.1.1	Nullstellen und Nullpolynome	107
7.1.2	Automatisches Beweisen von Punkt/Geraden-Sätzen .	108
7.1.3	Bemerkungen	110
7.2	Automatisches Sätze-Erkennen	111
7.3	Computeralgebra	111
7.3.1	Ideale und Varietäten	112
7.3.2	Beispiel: Automatisches Beweisen mit Computeralgebra	115
7.3.3	Gröbner Basen	117
	Monomordnungen	117
	Der Divisionsalgorithmus	119
	Gröbner Basen	121
	Buchbergers Kriterium	122
A	Übungsaufgaben	127
	Literatur	141

Vorlesungsverzeichnis

1. (24. Okt. '07)	Einführung, Axiome aff. Geometrie, Automorphismus	5
2. (31. Okt. '07)	Dilatationen, Translationen, affiner Pappus, Desargues	17
3. (07. Nov. '07)	Projektive Geometrie, Verhältnis zu affiner	23
4. (14. Nov. '07)	Homogene Koordinaten	31
5. (21. Nov. '07)	Kegelschnitte und Quadriken — eine Übersicht	37
6. (28. Nov. '07)	Klassifikation der Kegelschnitte, Bézout	41
7. (05. Dez. '07)	Ausgefallen: Doppelverhältnis, Satz v. Pascal, Dualität	51
8. (12. Dez. '07)	Dynamische Geometrie	57
9. (19. Dez. '07)	Über die Mächtigkeit Dynamischer Geometrie	69
10. (09. Jan. '08)	Unlösbarkeit der klassischen Probleme	76
11. (16. Jan. '08)	Überblick: Aktuelle Software	85
12. (22. Jan. '08)	Tangenten und Singularitäten algebraischer Kurven	91
13. (29. Jan. '08)	Einige wichtige Typen von Singularitäten	98
14. (06. Feb. '08)	Parametris. von Monoiden; Randomisiertes Beweisen	104
15. (13. Feb. '08)	Automatisches Beweisen: Computeralgebra	111
16. (20. Feb. '08)	Automatisches Beweisen: Gröbner Basen	121

Abbildungsverzeichnis

0.1	Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.	7
0.2	Parallelität bereitet manchen Programmen ein Problem.	8
0.3	Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise.	9
0.4	Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise.	9
0.5	Kontinuität ist auch nicht immer intuitiv!	10
0.6	Die Ortskurve eines 4-Stab-Gelenk-Mechanismus.	11
1.1	Die reelle affine Ebene.	15
1.2	Eine affine Ebene mit 4 Punkten.	16

1.3	Ein Koordinatenwechsel der reellen affinen Ebene.	17
1.4	Eine Streckung.	19
1.5	Zwei Punkte und deren Bilder unter einer Translation.	20
1.6	Konstruktion des Bildpunktes Q' unter einer Translation.	20
1.7	Ein Spezialfall des Satzes von Pappus.	22
1.8	Der Satz von Desargues.	22
2.1	Dürer und Perspektive	24
2.2	Vervollständigung der reellen affinen Ebene.	25
2.3	Parallelenbüschel \leftrightarrow Steigung	27
2.4	Eine Projektive Ebene mit 7 Punkten.	27
2.5	Vier Geraden und deren Schnittpunkte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	28
2.6	Vier Geraden und deren Schnittpunkte im Sphärenmodell.	29
2.7	Der (projektive) Satz von Pappus.	30
2.8	Der (projektive) Satz von Desargues.	31
2.9	Kanonische Einbettung von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^3	33
2.10	Affine Kegelschnitte.	34
2.11	Dürer und Perspektive	35
2.12	Das Möbiusband.	36
2.13	Die Boy'sche Fläche.	36
2.14	Das orthogonale Komplement eines Vektors.	38
2.15	Brennpunkte von Ellipsen und Gärtnerkonstruktion.	41
2.16	Ein glatter projektiver Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	44
2.17	Ein projektiver Punkt.	45
2.18	Ein projektives Geradenpaar.	45
2.19	Eine doppelt zählende projektive Gerade.	45
2.20	Der projektive glatte Kegelschnitt.	46
2.21	Ein Beispiel für Dualität am Dreieck.	55
3.1	SKIZZE fig:WinkelHalbierung FEHLT!	58
3.2	SKIZZE fig:WinkelViertelung FEHLT!	58
3.3	SKIZZE fig:Schnittpunkt2KreiseSpringt FEHLT!	58
3.4	Winkel-Viertelung.	59
3.5	Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten.	61
3.6	Ein komplexer Vektor, dargestellt im \mathbb{R}^2	62
3.7	Kreis und Gerade.	63
3.8	Lokale und globale Konsistenz.	63
3.9	Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise.	64
3.10	Eingaben in sind diskret.	64
3.11	Kreis mit der vertikalen Geraden.	65
3.12	Umwege um die Singularität bei $\lambda = 1$	66
3.13	Vertauschung durch den Monodromie-Effekt.	67
3.14	Schnitt der Winkelhalbierenden im Dreieck.	68
4.1	Die konstruierbaren Zahlen bilden einen Körper.	71

XII ABBILDUNGSVERZEICHNIS

4.2	Die konstruierbaren Punkte bilden einen euklidischen Körper.	71
4.3	Konstruktion der Konchoide.	74
4.4	Weitere mögliche Formen der Konchoide.	74
4.5	Würfelverdopplung mit der Konchoide.	75
4.6	Die Konstruktion der Quadratrix.	77
4.7	Die Quadratur des Kreis mit der Quadratrix.	78
4.8	Konstruierbarkeit eines Winkels.	80
4.9	Ein regelmäßiges 9-Eck.	83
6.1	Knotenpunkt und Spitze	91
6.2	Die Pascalsche Schnecke.	92
6.3	Die Stereographische Projektion.	94
6.4	Einige Kurven mit einer Singularität.	98
6.5	Eine gewöhnliche Mehrfachpunkte.	100
6.6	Gewöhnliche und nicht gewöhnliche Spitzen.	101
7.1	Der Kreis des Apollonius.	116
7.2	Die Spitze als Projektion.	125

Vorwort

Beim Spielen mit verschiedenen dynamischen Geometrie-Systemen wird nach einer Weile klar, dass einige der Systeme sehr anders reagieren als andere — obwohl eine Konstruktionsvorschrift ein eindeutiges Ergebnis liefern sollte, scheint es hier mehrere Interpretationsmöglichkeiten zu geben. Insbesondere für zukünftige Lehrer/innen, die immer wieder auf experimentierfreudige Schüler treffen werden, erscheint es daher wichtig, solche Phänomene zu verstehen, damit man/frau im Unterricht kompetent auf Nachfragen reagieren kann.

Einige Beispiele: Warum passieren in vielen Programmen falsche, unnatürliche Sprünge, obwohl die Konstruktion nur durch stetiges Ziehen eines Punktes verändert wird, und warum in manchen anderen nicht? Warum können gewisse Systeme Ortskurven korrekt darstellen und viele andere nicht? Wie können manche Programme automatisch nicht-triviale Eigenschaften einer Konstruktion feststellen (wie beispielsweise: die Höhen jedes Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt)?

Die Vorlesung (zweistündig, mit Übungen) beantwortet solche Fragen und erläutert, wie die Probleme entstehen und wie sie lösbar sind. Der Schlüssel dazu ist im Wesentlichen eine gute Kenntnis der reellen und komplexen projektiven Geometrie. Daher wird die Vorstellung dieses besonders schönen Bereiches der Geometrie einen großen Teil der Vorlesung einnehmen.

Im Anschluss geben wir noch einige knappe Darstellungen von Gebieten, auf die man stößt, wenn man die Funktionalitäten der Computer-Programme benutzt. Dies sind zunächst Fragen der Mächtigkeit von konstruktiver Geometrie, wie beispielsweise: Welche Punkte können mit Zirkel und Lineal konstruiert werden? Das genaue Studium dieser Frage wird es uns ermöglichen, die drei klassischen Probleme der Griechen über die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal zu klären: Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung, Quadratur des Kreises sind tatsächlich nur mit den genannten beiden Hilfsmitteln nicht möglich. Erlauben wir aber auch Schnitte mit Kurven, die durch Bewe-

gen eines auf einer Geraden gebundenen Punktes entstehen, so können wir zumindest die ersten beiden Probleme doch lösen. Dies führt uns unmittelbar zur Frage, welche Eigenschaften Ortskurven haben? Beispielsweise fallen sofort einige besondere Punkte auf, sogenannte singuläre Punkte — welche verschiedenen singulären Punkte gibt es und wie können wir diese unterscheiden? Die oben erwähnten Fragen führen auf Themen wie Galoistheorie, Singularitätentheorie, Algebraische Geometrie, von denen wir freilich jeweils nur einen kleinen Teil anreißen können und den interessierten Hörer auf weiterführende Literatur verweisen.

Gegen Ende der Veranstaltung gehen wir kurz auf das automatische Sätze-Beweisen ein. Hierfür gibt es viele Techniken, die alle ihre eigenen Stärken und Schwächen haben. Leider werden wir nur Zeit haben, auf das randomisierte Beweisen und das Beweisen mit Hilfe von Computeralgebra einzugehen. Erstere hat den Vorteil, dass die dabei vorgestellten Ideen auch zum automatischen Sätze-Erkennen verwendet werden können. Letztere stellen wir vor, weil sie wesentlich mehr Anwendungen im Bereich der Geometrie hat als nur das automatische Beweisen elementar-geometrischer Sätze.

Als Grundlage für die Vorlesung ist ein gutes Verständnis der im Grundstudium erlernten linearen Algebra und teilweise auch der Analysis nötig. Zunächst verwendet diese Kenntnisse verwenden, um einige Resultate in der euklidischen Ebene zu beweisen. Aber auch im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir viele Ergebnisse letztlich aus Sätzen des Grundstudiums herleiten. Beispielsweise basiert die Klassifikation der Quadriken in der Ebene und im Dreiraum, die wir knapp vorstellen, auf der Klassifikation der reellen symmetrischen Matrizen. Für das Studium der oben erwähnten singulären Punkte werden wir die Taylorentwicklung um den Punkt verwenden.

Die Basis der Vorlesung sind viele Bücher und Vorlesungsskripte anderer Dozenten, da ich leider kein Buch kenne, das den von mir behandelten Stoff vorstellt. Daher gebe ich für jedes Kapitel oder jeden Abschnitt geeignete Literatur an. Beispielsweise sind die ersten beiden Kapitel der Veranstaltung, in denen wir affine und projektive Ebenen einführen, an das schöne Buch [KK96] angelehnt. Leider können wir im Rahmen der zweistündigen Veranstaltung dieses sehr nette Stück Lektüre nicht komplett vorstellen, da wir ja nur die für die Grundlagen dynamischer Geometrie wichtigen Aspekte herausgreifen möchten. Zur Vertiefung der Kenntnisse der Projektiven Geometrie sei es dem/der Leser/in aber wärmstens empfohlen, da es den Stoff auf sehr elementare Weise vorstellt.

Unter den Serientitel *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* fügt sich diese Veranstaltung besonders gut ein, weil nicht nur die obigen Phänomene dynamischer Geometrie erklärt werden, sondern weil sich während des Semesters herausstellen wird, dass die projektive Geometrie und das Studium der algebraischen Kurven außerdem das Verständnis der Schulgeometrie (also der euklidischen) von einem sehr einheitlichen Blickwinkel verständlich

macht. Die projektive Geometrie ist nämlich, wie wir sehen werden, weit mehr als nur die Formalisierung der Perspektive, die man spätestens seit Albrecht Dürer aus der bildenden Kunst kennt. Beispielsweise kann man nur durch den Übergang zur projektiven komplexen Ebene in sinnvoller Weise angeben, wann eine algebraische Kurve parametrisiert werden kann.

Die anschauliche Darstellung der Vorlesung ist neben der jeweils zitierten Literatur auch stark von bekannten Geometern aus dem beginnenden 20. Jahrhundert, insbesondere von D. Hilbert (s. beispielsweise [HCV32]) und F. Klein [Kle25, Kle22] und auch noch aktiven, wie z.B. M. Reid (z.B. [Rei88]), beeinflusst, auch wenn ich zu diesen Mathematikern nicht immer explizite Verweise angebe. Ich hoffe, dass mir die Präsentation des Stoffes so gelingt, dass die Hörer der Veranstaltung ähnlich von der Geometrie und ihren Zusammenhängen zur Algebra fasziniert werden, wie es meiner Meinung nach diese Bücher verdeutlichen.

Für das Thema dieser Vorlesung interessiert haben mich bereits vor einigen Jahren Gespräche mit und Vorträge von U. Kortenkamp — einem der Autoren des dynamischen Geometrie Programmes C [KRG01]—, in denen er immer wieder auf die erwähnten Probleme einging. Dies ist einer der Hauptgründe, aus denen ich diese Veranstaltung überhaupt anbiete. Viele Graphiken dieses Skriptes habe ich mit C erstellt.

Ich hoffe, dass die Vorlesung den zukünftigen Lehrern/innen eine große Hilfe für ihre spätere Lehrtätigkeit sein wird und dass ich außerdem im Laufe des Semesters ein klein wenig der Faszination, die Geometrie und deren Verhältnis zur Algebra ausüben kann, vermitteln werde. Vielleicht schaffen es die Hörer/innen ja sogar, diese Faszination an der Mathematik und speziell der Geometrie später ihren Schülern näher zu bringen. Denn dies ist meiner Meinung nach eines der besten Mittel, um die Leistungen im Fach Mathematik zu verbessern: Spaß und Interesse aufbauen, damit die Schüler selbst mehr wissen und lernen möchten.

Ich werde versuchen, die Veranstaltung so umzusetzen, dass jede/r alles verstehen kann, wenn er/sie zu Hause die Vorlesung noch einmal durcharbeitet. Außerdem soll jede/r für mindestens $2/3$ der Übungsaufgaben den korrekten Lösungsweg erkennen können. Ich hoffe, dass Vorlesung und Übungen diesen Kriterien entsprechen, ohne dabei trivial zu erscheinen. Dies kann allerdings nur dann eingehalten werden, wenn die Hörer/innen ein gutes Verständnis der linearen Algebra mitbringen. Denn diese werden wir immer wieder verwenden, um die geometrische Theorie aufzubauen. Ich wünsche allen Hörer/innen viel Spaß!

Im August 2007,

Oliver Labs

Einführung

An einigen wenigen Beispielen stellen wir hier knapp einige mögliche Anwendungen von dynamischen Geometrie Systemen vor. Außerdem sprechen wir schon einmal kurz einige der Probleme an, die meine Hauptmotivation sind, diese Vorlesung anzubieten. Des weiteren wird anhand der Beispiele deutlich werden, warum wir in einem eigenen Kapitel auch höhere Kurven und das automatische Sätze-Erkennen und -Beweisen ansprechen sollten.

1. Vorl. — 24. Okt. '07
Einführung, Axio-
me aff. Geometrie,
Automorphismus

0.1 Zu den Übungsaufgaben und zur Klausur

0.1.1 Regelmäßig wiederkehrende Aufgabentypen

Fast jede Woche werden mehrere verschiedene Typen von Übungsaufgaben zu bearbeiten sein:

- Relativ einfache theoretische Aufgaben, die den in der Vorlesung vorgestellten Stoff vertiefen sollen.
- Konstruktionsaufgaben mit dynamischer Geometrie Software (meist $D - G$, $G - G$ oder C).
- Etwas schwierigere Aufgaben, für deren Lösung etwas mehr mathematische Kreativität gefordert ist, und die teilweise ein wenig über den engen Rahmen des Vorlesungsthemas hinausgehen. Manche Aufgaben werden sogar nicht lösbar sein, ohne weitere Literatur heranzuziehen; diese werde ich dann aber angeben.

Insbesondere die leichteren Aufgaben sind sehr gut dazu geeignet, direkt innerhalb der Übungsstunde bearbeitet zu werden, ohne zu Hause lange darüber nachdenken zu müssen. Wir werden aber auch manche der komplexeren Aufgaben als Präsenzaufgaben bearbeiten — dann aber gemeinsam.

Zur Klausur zugelassen wird, wer wenigstens 50% der möglichen Punkte in den Hausaufgaben (durch das Kürzel HA kenntlich gemacht) erreicht hat; die Präsenzaufgaben (PA) werden nicht bewertet. Allerdings wird sich eine sehr gute und aktive Mitarbeit in den Übungen bei Studierenden, die die Zulassungsgrenze knapp unterschritten haben, ggf. positiv auswirken.

0.1.2 Ausführliche Hausaufgabe

Einmal im Semester wird es eine über zwei Wochen zu bearbeitende Hausaufgabe geben, die etwas umfangreicher ist und die für jeden verschieden sein wird.

Diese Aufgabe ist von jedem selbständig schriftlich mit \LaTeX nach einem vorgegebenen Layout zu bearbeiten und wird vermutlich auch auf die Vorlesungs-Webseite gestellt werden. Die Anzahl der verwendeten Seiten soll 2 nicht unter- und 8 nicht überschreiten. Mindestens eine dynamische Konstruktion soll hierbei sinnvoll eingesetzt werden.

Die Bewertung dieser Arbeit geht zu $\frac{1}{3}$ in die Endnote der Veranstaltung ein.

0.1.3 Die Klausur

Die Klausur am Ende des Semesters wird nur theoretische Aufgaben beinhalten. Die praktische Nutzung von verschiedenen dynamischen Geometrie Systemen wird in den Hausaufgaben häufig genug geübt werden. Die Klausurnote geht zu $\frac{2}{3}$ in die Endnote ein.

Um einen Schein zu erhalten, müssen sowohl Klausur als auch die ausführliche Hausaufgabe bestanden werden.

0.2 Dynamische Konstruktionen

0.2.1 Ein Beispiel: Höhen im Dreieck

Unser allererstes Beispiel dynamischer Geometrie sei die Eigenschaft, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks stets in einem gemeinsamen Punkt schneiden (Abb. 0.1). Interessanter Weise erscheint dieses fundamentale Faktum nirgends in Euklids¹ Elementen² sondern unseres Wissens erst 1928 bei Durrell [Dur20]. Mit einem dynamischen Geometrie Programm zur Hand hätten Euklid und seine Mitstreiter es bestimmt entdeckt und für aufschreibenswert befunden.

¹Euklid lebte in Alexandria (heutiges Ägypten), etwa 325 v.Chr. – 265 v. Chr., siehe [OR07, SS02]

²Euklids *Elemente* sind das erste bekannte umfangreiche Mathematikbuch — und es war bis ins 19. Jahrhundert eines der meistgelesenen Bücher. Es handelt von Geo-

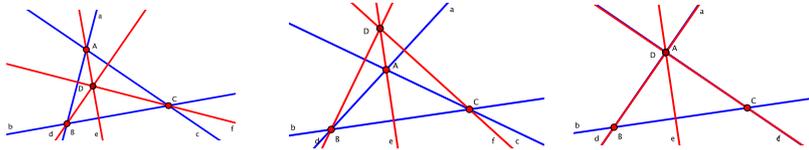


Abbildung 0.1. → `pics/dreieck_hoehen.cdy` Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt: links nur spitze Winkel, in der Mitte ein stumpfer Winkel, rechts ein rechter Winkel.

Der große Vorteil dynamischer Geometrie Software gegenüber des Konstruierens mit Zirkel und Lineal ist die Tatsache, dass man jederzeit die frei beweglichen Ausgangsobjekte — hier die drei Eckpunkte des Dreiecks — verschieben kann und sich dann instantan die davon abhängigen Objekte in ihrer Lage anpassen.

0.2.2 Einige Anwendungen Dynamischer Geometrie

Sätze entdecken

Die Höhen im Dreieck aus dem vorigen Abschnitt sind ein Paradebeispiel für eine der wichtigsten Anwendungen dynamischer Geometrie: Durch ein wenig Herumspielen mit den Eckpunkten des Dreiecks — von denen die Höhen natürlich abhängen (Abb. 0.1) — kommt man sehr schnell auf die Vermutung, dass sich die drei Höhen immer in einem Punkt schneiden. Allerdings ist dies natürlich noch längst kein Beweis, dass dies immer so ist, auch wenn wir sehr viele Positionen ausprobieren. Wie sich eine gefundene richtige Behauptung trotzdem automatisch beweisen lässt, werden wir gegen Ende der Vorlesung kurz ansprechen.

Sätze intuitiv erfahren

Betrachten wir nochmals das Beispiel der Höhen im Dreieck (Abb. 0.1). Wenn ein Schüler abstrakt den Satz bereits kennt, dass sich alle Höhen in einem Dreieck schneiden, so werden sich die meisten wohl eine konkrete Instanz eines Dreiecks im Kopf vorstellen. Dynamische Geometrie Software fordert aber

metrie, ist axiomatisch aufgebaut und enthält (mehr oder weniger) strenge Beweise für alle Behauptungen, die aufgestellt werden. Besonders erwähnenswert ist auch, dass diese Beweise meist konstruktiv geführt werden: Euklid gibt sozusagen Algorithmen an, die er allgemein formuliert und die immer zum Ziel führen. Im Internet finden sich viele Informationen über die Elemente [Joy96, Var07] und natürlich auch viel Literatur [SS02].

geradezu dazu heraus, mit der Konstruktion zu spielen und auch andere, vielleicht auf den ersten Blick nicht in den Sinn gekommene Fälle zu entdecken und dadurch die Intuition wesentlich zu verbessern.

Im Beispiel der Höhen im Dreieck stellen sich vermutlich einige Schüler zunächst nur den Fall vor, in dem alle Höhen innerhalb des Dreiecks verlaufen (linkes Bild in Abb. 0.1). Dass dies aber nicht immer der Fall sein muss, stellt man sofort fest, wenn man in einem dynamischen Geometrie Programm experimentiert. Dies fordert die Schüler dazu auf, sich zu fragen, wann dies passieren kann (was im Beispiel zwar nahezu offensichtlich ist, im Allgemeinen aber nicht so sein wird).

Allerdings liefert das intuitive Erfahren einer dynamischen Konstruktion zunächst leider keinen Beweis für die Richtigkeit einer Aussage, die man dabei entdeckt hat. Methoden zum automatischen Schließen dieser Lücke werden wir gegen Ende der Vorlesung kennenlernen.

0.2.3 Ein erstes Problem

Für viele dynamische Geometrie Programme ist Parallelität ein großes Problem. Wird beispielsweise in einer Konstruktion der Schnittpunkt zweier Geraden verwendet und verschiebt man dann die Punkte, so dass die beiden Geraden parallel liegen, so bricht bei vielen Systemen die ganze Konstruktion zusammen (Abb. 0.2).

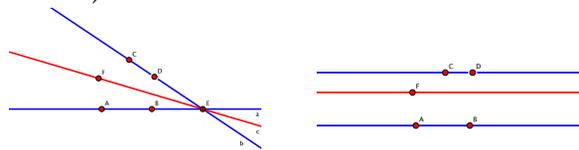


Abbildung 0.2. → pics/parallelitaet_problem.cdy Parallelität bereitet manchen Programmen ein Problem: Die mittlere Gerade ist definiert als Verbindungsgerade des Schnittpunkts der beiden anderen Geraden mit dem Punkt F . Die Abbildung zeigt das korrekte Verhalten: auch wenn der Schnittpunkt im Unendlichen ist, wird die Gerade noch gezeichnet.

Nicht aber bei solchen Programmen, die auch mit sogenannten unendlich fernen Punkten zurecht kommen. Dies werden wir im Abschnitt über reelle projektive Geometrie genauer verstehen.

0.2.4 Ein weiteres Problem: Stetigkeit — Pro und Kontra

Pro Stetigkeit

Ein noch schwieriger zu lösendes Problem als das der Parallelität ist es, beim Verschieben von Konstruktionselementen immer konsistent zu bleiben. Bei-

spielsweise haben die meisten dynamischen Geometrie Programme das Problem, dass die beiden Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise spontan den Platz tauschen (Abb. 0.3).

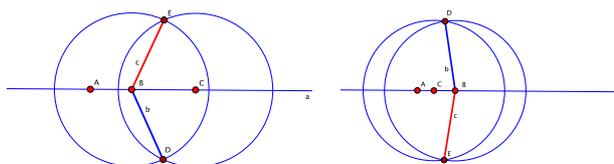


Abbildung 0.3. Falsches, unstetiges Verhalten der Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise: die blaue und die rote Strecke wechseln ihren Platz beim Verschieben des Mittelpunktes eines der Kreise.

Zunächst ist unklar, woher dieses Problem überhaupt kommt. Doch die Tatsache, dass es einige wenige Programme gibt, die auch in dieser Situation konsistent³ — für uns heißt dies hier zunächst einfach mal: stetig — arbeiten (Abb. 0.4), spricht dafür, dass es vermutlich lösbar ist. Dazu werden wir Geometrie über den komplexen Zahlen betreiben müssen. Unseres Wissens ist C [KRG01] das derzeit einzige Programm auf dem Markt, das die Stetigkeit korrekt umsetzt; G G verwendet eine Heuristik, die in manchen Fällen auch ein korrektes Ergebnis liefert.

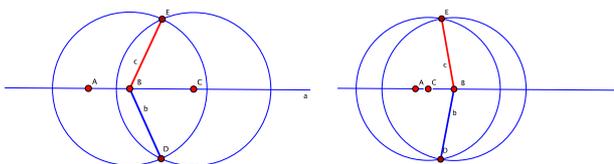


Abbildung 0.4. → pics/zwei_Kreise.cdy Korrektes, stetiges Verhalten der Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise: die blaue und die rote Strecke bleiben an ihrem jeweiligen Platz beim Verschieben des Mittelpunktes eines der Kreise.

Kontra Stetigkeit

Kontinuität hat aber auch ihre Nachteile. Beispielsweise bewirkt in C - das Ziehen des einen Eckpunktes B eines Dreiecks durch den anderen A,

³Achtung! Es ist nicht klar, was *konsistent* genau heißen soll! Insbesondere führt auch die auf den ersten Blick konsistente Betrachtungsweise von C zu auf den ersten Blick nicht einleuchtenden Situationen, wie wir später sehen werden.

dass die sich vorher innerhalb des Dreiecks schneidenden Winkelhalbierenden sich nun außerhalb treffen (s. Abb. 0.5).

Dieses Problem ist, wie wir sehen werden, ein fest an die Stetigkeit gekoppeltes. In diesem Sinne gibt es also kein perfektes dynamisches Geometrie Programm. Auch um dies zu verstehen, müssen wir ein wenig Geometrie im Komplexen betreiben.

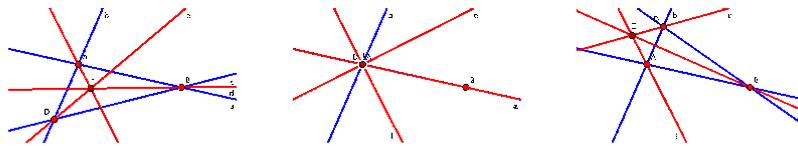


Abbildung 0.5. → pics/dreieck_schnitt_winkelhalb.cdy Kontinuität ist auch nicht immer intuitiv! Im gezeigten Beispiel bewirkt das Ziehen des einen Eckpunktes B durch den anderen A , dass die sich vorher innerhalb des Dreiecks schneidenden Winkelhalbierenden sich nun außerhalb treffen.

0.3 Ortskurven

Ähnlich gelagert wie das Problem der Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise ist jenes des korrekten Zeichnens von Ortskurven. Eine **Ortskurve** ist hierbei die Menge aller Punkte $Q(P)$, die sich aus einer gegebenen Konstruktion ergeben, wenn der Punkt P sich entlang einer Geraden, eines Kreises oder allgemeiner einer parametrisierten ebenen Kurve bewegt. Auch hier, bei dieser ganz wesentlichen Aufgabe eines dynamischen Geometrie Systems, versagen die meisten.

0.3.1 Ein 4-Stab-Gelenk-Mechanismus

Nehmen wir als Beispiel eine sogenannte 4-Stab-Gelenk-Mechanismus, d.h. ein System von vier Stäben in der Ebene, die jeweils an ihrem Ende mit einem Gelenk verbunden sind. In den Abbildungen ist die Position eines der Stäbe fixiert und nur die verbleibenden drei Stäbe werden gezeigt. Wir möchten nun die Kurve der Mittelpunkte des mittleren der drei Stäbe einzeichnen. In vielen Programmen sieht dies dann aus wie im linken Bild von Abb. 0.6, korrekt ist aber das rechte Bild.

Woher kommt das Problem? Auch dieses lässt sich mit der Geometrie im Komplexen verstehen und lösen.

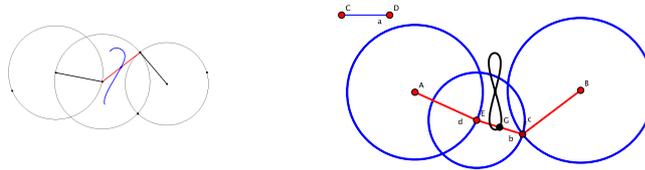


Abbildung 0.6. → `pics/four_bar_linkage.cdy` Die Ortskurve eines 4-Stab-Gelenk-Mechanismus, rechts korrekt, links falsch (nur die halbe Kurve wird gezeichnet).

0.3.2 Eigenschaften von Ortskurven

Um ein tieferes Verständnis der auftretenden Ortskurven aufzubauen, werden wir exemplarisch einige etwas näher untersuchen und diese in die Klasse der ebenen algebraischen Kurven, die als Nullstellenmenge eines Polynoms in zwei Variablen gegeben sind, einordnen.

Es fallen sofort einige besondere Punkte der Ortskurven auf, wie beispielsweise der Punkt der Ortskurve des 4-Stab-Gelenk-Mechanismus in Abbildung 0.6, in dem sich die Kurve selbst schneidet. Solche Punkte heißen Singularitäten. Wir werden klären, wie man diese erstens lokalisieren und zweitens ansatzweise klassifizieren kann.

0.3.3 Über die Mächtigkeit Dynamischer Geometrie

Ortskurven hängen unmittelbar mit der Frage zusammen, welche Punkte mit Hilfe dynamischer Geometrie überhaupt konstruiert werden können. Wir werden nämlich sehen, dass man mit Zirkel und Lineal nur sehr wenige Punkte konstruieren kann. Insbesondere kann man nur mit diesen beiden Hilfsmitteln nicht jeden beliebigen Winkel dritteln, wie schon die Griechen vermuteten. Erlaubt man zusätzlich aber auch Schnitte mit Ortskurven, so ist dies möglich!

0.4 Automatisches Sätze-Erkennen und -Beweisen

Einige dynamische Geometrie Systeme können automatisch gewisse geometrische Sachverhalte, die allgemeingültig sind, erkennen und beweisen. Wie kann das funktionieren? Es stehen hierfür mehrere verschiedene Methoden bereit. Drei von ihnen werden wir kurz ansprechen, allerdings können wir nicht alle nötigen Aussagen auch beweisen, sondern müssen auf Literatur verweisen.

Als erstes Beispiel hierzu betrachten wir wiederum den Schnittpunkt der Höhen im Dreieck (Abb. 0.1). Definieren wir in C diesen als Schnittpunkt zweier der Höhen, so stellt das Programm automatisch fest, dass dieser auch auf der anderen Höhe liegt. Dies benutzt das Programm, um automatisch bei Übungsaufgaben kontrollieren zu können, ob sie gelöst wurden.

Affine Geometrie

Reine Affine Geometrie ist, kurz gesagt, der Teil der Theorie der bekannten euklidische Geometrie, der ohne Abstände, Winkel und Senkrechten auskommt. In diesem Kapitel werden wir zunächst diese Theorie behandeln, doch auch hier wird das wichtige Beispiel der reellen affinen Geometrie häufig auftauchen, in dem wir dann auch die euklidischen Abstände usw. verwenden werden, wenigstens, wenn wir illustrierende Zeichnungen anfertigen. Die Darstellung in diesem Kapitel beruht zum großen Teil auf [KK96] und [Aud03].

Für den axiomatischen Aufbau der affinen Geometrie benutzen wir die aus der linearen Algebra bekannten Tatsachen. Tatsächlich werden viele Resultate dieses Kapitels recht einfache Folgerungen aus den von der linearen Algebra bekannten Sätzen sein.

Am Ende des Kapitels gehen wir genauer auf einige Beispiele ein, die jene Probleme erläutern, die Dynamische Geometrie Software hat, wenn sie nur auf affiner (bzw. natürlich euklidischer) Geometrie basiert.

1.1 Affine Ebenen

Unser Zugang zur affinen, zunächst koordinatenfreien Geometrie ist axiomatisch, ganz ähnlich dem über 2000 Jahre alten Ansatz von Euklid (s. [Joy96]). Ohne Koordinaten starten wir, da es insbesondere bei der Behandlung der Grundlagen von dynamischen Geometrie Systemen natürlich ist, zu untersuchen, welche Eigenschaften nicht von Koordinaten abhängen, da ja die Hauptaufgabe solcher Software Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind, die nicht von den konkreten Koordinaten der Ausgangspunkte abhängen.

Wir beginnen also mit einer Definition, die die grundlegendsten Eigenschaften, die uns aus der euklidischen Geometrie bekannt sind, zusammenfasst.

Genauso wie Euklids erste Definition „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“ beruht unser Ansatz freilich wie die gesamte aktuelle Mathematik auf einem wenig fundierten Konzept, nämlich dem der Menge (s. dazu z.B. [Hal74]).

Definition 1.1. Eine *affine Ebene* ist eine Menge, deren Elemente wir **Punkte** nennen, zusammen mit einer Menge von Untermengen, sogenannten **Geraden**, die den unten stehenden Axiomen A1–A3 genügen. Für einen Punkt P und eine Gerade l schreiben wir auch P **liegt auf** l oder l **geht durch** P für die Eigenschaft $P \in l$.

A1 Zu je zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade, die P und Q enthält, notiert PQ .

A2 Zu jeder Geraden l und jedem Punkt P , der nicht auf l liegt, gibt es genau eine Gerade m , auf der P liegt und die keinen Punkt mit l gemeinsam hat.

A3 Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Mit dieser Definition werden zwei Eigenschaften besonders herausgehoben, für die wir eigene Begriffe einführen möchten:

Definition 1.2. Eine Menge von Punkten heißt **kollinear**, falls es eine Gerade gibt, auf der alle Punkte liegen.

Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie entweder identisch sind oder wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben. Notation: $l \parallel m$. Daher wird Axiome A2 auch **Parallelenaxiom** genannt.

Um Beziehungen wie *liegt auf* und *geht durch* einheitlicher formulieren zu können, führen wir einen sehr symmetrischen neuen Begriff ein, der sich, wie sich später noch herausstellen wird, als sehr nützlich erweisen wird:

Definition 1.3. Gilt für einen Punkt P und eine Gerade g , dass $P \in g$, so sagen wir, P **inzidiert mit** g und g **inzidiert mit** P .

Beispiel 1.4 (Die reelle affine Ebene). Die gewöhnliche, aus der euklidischen Geometrie bekannte, Ebene \mathbb{R}^2 , erfüllt die Axiome A1–A3 und ist daher eine affine Ebene, die **reelle affine Ebene**. Wie üblich verwenden auch wir Cartesische Koordinaten, wie in der analytischen Geometrie, um diese Ebene darzustellen: Ein Punkt P wird dabei durch ein geordnetes Paar $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ repräsentiert und eine Gerade besteht aus allen Punkten (x, y) , die eine lineare Gleichung erfüllen, also $y = mx + b$ oder $x = a$ für gewisse $a, b, m \in \mathbb{R}$ (Abb. 1.1). Knapper lässt sich dies, wie aus den Grundvorlesungen bekannt, folgendermaßen mit Hilfe von Vektoren formulieren:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0,$$

wobei \cdot das Skalarprodukt bezeichnet, $a \in \mathbb{R}^2$ ein Aufpunkt der Geraden und $n \in \mathbb{R}^2$ der normierte Normalenvektor ist. Wie ebenfalls bekannt sein sollte, ist dann $a \cdot n$ der Abstand der Geraden vom Ursprung. \square

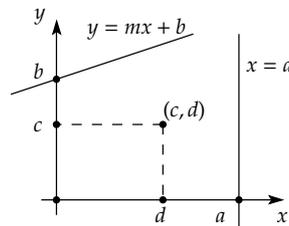


Abbildung 1.1. Die reelle affine Ebene, ein Punkt und zwei Geraden.

Aus den Axiomen A1–A3 können wir leicht einige Eigenschaften herleiten:

Proposition 1.5. 1. *Parallelismus ist eine Äquivalenzrelation.*

2. *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

In Anwendungen der affinen und projektiven Geometrie in der Kodierungstheorie oder Kryptographie kommen häufig endliche Ebenen zum Einsatz (s. dazu beispielsweise [BR92]). Ein erstes Resultat darüber ist das folgende:

Proposition 1.6. *Eine affine Ebene hat mindestens vier Punkte.*

Beweis. Wegen A3 gibt es wenigstens drei verschiedene nicht kollineare Punkte P, Q, R . Nach A2 gibt es eine Gerade l durch P , die parallel zur Geraden QR (Axiom A1) ist. Genauso existiert eine Gerade $m \parallel PQ$ durch R .

Nun ist $l \not\parallel m$, denn sonst hätten wir $PQ \parallel m \parallel l \parallel QR$ und daher $PQ \parallel QR$ nach Proposition 1.5.1. Doch $PQ \neq QR$, weil die drei Punkte nicht kollinear sind, und beide Geraden enthalten Q , sie können also nicht parallel sein.

l muss also m in genau einem Punkt S treffen (Prop. 1.5.2). Da dieser Punkt S auf m liegt und da $m \parallel PQ$ und $m \neq PQ$, liegt S nicht auf PQ , also $S \neq P$ und $S \neq Q$. Analog ergibt sich $S \neq R$. S ist also der vierte, gesuchte Punkt. □

Es gibt tatsächlich eine affine Ebene mit nur vier Punkten:

Beispiel 1.7 (Eine affine Ebene mit vier Punkten). Um zu beweisen, dass es eine Ebene mit nur vier Punkten gibt, müssen wir für vier Punkte P, Q, R, S Geraden angeben, so dass die Axiome A1–A3 erfüllt sind. Nach A1 müssen alle Verbindungsgeraden zweier Punkte, also $\{P, Q\}, \{P, R\}, \{P, S\}, \{Q, R\}, \{Q, S\}, \{R, S\}$ existieren. Es ist nun ein Leichtes nachzuprüfen, dass dies wirklich eine affine Ebene ergibt (s. Abb. 1.2). □

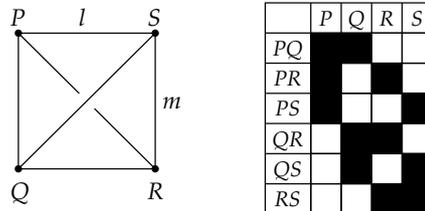


Abbildung 1.2. Eine affine Ebene mit 4 Punkten. Das linke Bild veranschaulicht sie durch Punkte und Strecken, das rechte Bild durch die Inzidenzen: ein Kästchen ist schwarz gefärbt, wenn der Punkt auf der Geraden liegt. Vertauscht man hier schwarze Kästchen mit 1en und weiße mit 0en, so ergibt sich eine sogenannte **Inzidenzmatrix**.

1.2 Abbildungen der affinen Ebene

1.2.1 Automorphismen

Wir betrachten nun Abbildungen von der affinen Ebene in sich mit gewissen Eigenschaften. Dabei beschränken wir uns auf solche Abbildungen, die die wesentlichen Eigenschaften der affinen Ebene, insbesondere die Kollinearität von Punkten, beibehalten:

Definition 1.8. Ein **Automorphismus** Φ einer affinen Ebene \mathbb{A} ist eine Permutation (bijektive Abbildung) der Punkte von \mathbb{A} , die kollineare Punkte auf kollineare Punkte abbildet.

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, bezeichnen wir das Bild eines Punktes bzw. einer Gerade unter einem Automorphismus durch Hinzufügen eines ', beispielsweise $P' = \Phi(P)$ für einen Punkt P , um die umständliche Schreibweise $\Phi(\cdot)$ zu vermeiden.

Eine **affine Invariante** ist eine Eigenschaft einer Menge von Objekten einer affinen Ebene, die nach Anwendung eines beliebigen Automorphismus der Ebene erhalten bleibt.

Zunächst betrachten wir Abbildungen jener affinen Ebenen, die im vorigen Abschnitt bereits ins Spiel kamen:

Beispiel 1.9 (Permutationen der Ebene mit vier Punkten). Permutieren wir in der Ebene mit vier Punkten aus Beispiel 1.7 die Buchstaben P, Q, R, S , so werden dabei Geraden auf Geraden abgebildet und außerdem wird Parallelismus erhalten. Dies lässt sich leicht nachprüfen; wir betrachten hier nur die Vertauschung von P und Q : die Geraden PR und QS werden auf QR und PS abgebildet. Die Menge der Punkte und auch die Menge der Geraden bleibt bei der Permutation erhalten. Eine solche Permutation der Punkte liefert also

einen Automorphismus der affinen Ebene, der außerdem parallele Geraden wieder auf parallele abbildet. \square

Ähnlich verhält es sich bei den reellen affinen Ebenen:

Beispiel 1.10 (Koordinatenwechsel der reellen affinen Ebene). Unter einem **Koordinatenwechsel** der reellen Ebene \mathbb{R}^2 , gegeben durch eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

wobei $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, gehen, wie im vorigen Beispiel, Geraden in Geraden

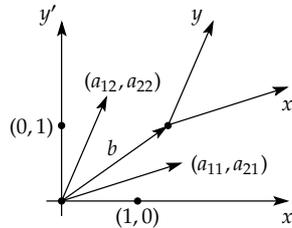


Abbildung 1.3. Ein Koordinatenwechsel der reellen affinen Ebene.

und parallele Geraden in parallele Geraden über und die Punkte der Ebene werden permutiert (siehe Abb. 1.3). \square

Die Tatsache, dass unter Automorphismen der obigen affinen Ebenen nicht nur kollineare Punkte auf ebensolche abgebildet werden, sondern sogar parallele Geraden auf parallele, ist kein Zufall, wie wir gleich sehen werden. Zuvor noch eine Bemerkung:

Bemerkung 1.11. Sei eine Gerade $l = PQ$ einer affinen Ebene \mathbb{A} gegeben. Ein Automorphismus Φ ist, eingeschränkt auf l , eine Bijektion zwischen l und $l' = \Phi(l)$. Außerdem besitzt ein Automorphismus offenbar die folgenden beiden Eigenschaften:

1. $\Phi(P \cup Q) = \Phi(P) \cup \Phi(Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{A}$,
2. $\Phi(l \cap m) = \Phi(l) \cap \Phi(m) \quad \forall l, m : l \nparallel m$.

Proposition 1.12. Ein Automorphismus einer affinen Ebene bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

Beweis. Seien zwei parallele Geraden $PQ \parallel RS$ in einer affinen Ebene \mathbb{A} gegeben. Falls $B' \in P'Q' \cap R'S'$ für einen Punkt B , so gilt wegen der Bemerkung $B \in PQ \cap RS$, also $PQ = RS$. Somit gilt aber auch $P'Q' = R'S'$. Falls $P'Q'$ und $R'S'$ keinen Punkt gemeinsam haben, sind sie aber parallel. \square

2. Vorl. — 31. Okt. '07
Dilatationen, Translationen, affiner Pappus, Desargues

Parallelität zweier Geraden ist also eine affine Invariante.

Proposition 1.13. *Die Menge $\text{Aut } \mathbb{A}$ der Automorphismen einer affinen Ebene \mathbb{A} bildet eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung.*

Beweis. Für $\Phi, \Psi \in \text{Aut } \mathbb{A}$ müssen wir nur überprüfen, dass sowohl $\Phi \circ \Psi$ als auch Φ^{-1} Geraden auf Geraden abbilden: Sind drei Punkte $P, Q, R \in \mathbb{A}$ kollinear, so sind es auch $\Psi(P), \Psi(Q), \Psi(R)$ und dann auch $\Phi(\Psi(P)), \Phi(\Psi(Q)), \Phi(\Psi(R))$.

Betrachten wir nun die Punkte $A = \Phi^{-1}(P), B = \Phi^{-1}(Q), C = \Phi^{-1}(R) \in \mathbb{A}$. Diese sind ebenfalls kollinear, da sonst für die Geraden AB und BC gelten würde: $AB \neq BC$, also auch $PQ \neq QR$, da $P = \Phi(A), Q = \Phi(B), R = \Phi(C)$. \square

1.2.2 Dilatationen

Wir haben schon mehrfach gesehen, dass Parallelität von Geraden eine sehr wichtige Eigenschaft affiner Ebenen ist. In diesem Unterabschnitt betrachten wir nun Automorphismen, bei denen Parallelität eine noch stärkere Rolle spielt:

Definition 1.14. *Sei \mathbb{A} eine affine Ebene. Eine **Dilatation** ist ein Automorphismus $\Phi: x \mapsto x'$ von \mathbb{A} , so dass für je zwei verschiedene Punkte P, Q gilt: $PQ \parallel P'Q'$.*

Eine Dilatation bildet also jede Gerade auf eine parallele Gerade ab. Dies mag zwar auf den ersten Blick wie ein sehr spezieller Fall erscheinen, doch eben diese Situation kommt in der Praxis häufig vor, beispielsweise in Form einer Streckung:

Beispiel/Definition 1.15 (Streckungen in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$). In der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist eine **Streckung** vom Ursprung $O = (0, 0)$ aus mit **Streckungsfaktor** λ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (\lambda x, \lambda y).$$

Dies ist eine Dilatation, denn wenn P und Q zwei Punkte sind, so ist $PQ \parallel P'Q'$, da die auftretenden Dreiecke ähnlich sind, wie sich leicht mit elementarer Geometrie zeigen lässt (Abb. 1.4). Wir möchten hier aber betonen, dass dieser Beweis sehr stark die Eigenschaften der reellen Zahlen ausnutzt, beispielsweise das Konzept von Winkeln in der Ebene. Man kann dies also zumindest so nicht auf eine allgemeine affine Ebene übertragen. \square

Die folgenden Eigenschaften sind wieder leicht nachzuprüfen:

Proposition 1.16. *1. Sei \mathbb{A} eine affine Ebene. Die Menge $\text{Dil } \mathbb{A}$ der Dilatationen von \mathbb{A} bildet eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung.*

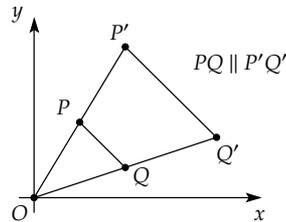


Abbildung 1.4. Eine Streckung ist ein Beispiel für eine Dilatation.

2. Eine Dilatation, die zwei Punkte fest lässt, ist die Identität.
3. Eine Dilatation ist durch die Bilder zweier verschiedener Punkte bestimmt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung/Definition 1.17. Eine Dilatation σ , die einen Punkt O fest lässt, heißt **Streckung mit Zentrum** O . Nach der Proposition 1.16 müssen wir, um σ zu definieren, also außer O nur das Bild P' eines weiteren Punktes P angeben. Dieser muss aber auf der Geraden OP liegen, denn: Da σ eine Dilatation ist, gilt: $PO \parallel P'O'$, aber $O = O'$, also $PO \parallel P'O$, d.h. $PO = P'O$.

1.2.3 Translationen

Eine Dilatation, die nicht die Identität ist, hat also höchstens einen Fixpunkt. Jene Dilatationen ohne Fixpunkt bekommen einen eigenen Namen:

Definition 1.18. Eine **Translation** oder **Verschiebung** einer affinen Ebene ist eine Dilatation, die entweder die Identität ist, oder keinen Fixpunkt hat. Manchmal sagen wir **echte Translation** für eine Translation, die nicht die Identität ist.

Selbstverständlich haben auch die Translationen die folgende aus der euklidischen Geometrie bekannte Eigenschaft:

Proposition 1.19. Sei $\Phi \neq \text{id}$ eine Translation. Dann gilt für zwei verschiedene Punkte P, Q : $PP' \parallel QQ'$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $PP' \not\parallel QQ'$, so dass sich diese beiden Geraden in genau einem Punkt S schneiden. Aber Φ ist eine Dilatation, also gilt für einen Punkt $P \neq R \in PP'$: $PR \parallel P'R'$, aber $PR = PP'$, also $PP' \parallel P'R'$, aber $P' \in PP' \cap P'R'$ also $PP' = P'R'$. Damit folgt: $R' \in PP'$. Insgesamt ergibt sich also, da R ein beliebiger Punkt auf PP' war: PP' wird in sich selbst abgebildet und analog QQ' ebenso. Damit folgt $\Phi(S) = \Phi(PP' \cap QQ') = PP' \cap QQ' = S$, doch Φ hat nach Voraussetzung keinen Fixpunkt. □

Zwei Punkte P, Q und deren Bilder P', Q' formen unter einer Translation also ein Parallelogramm (Abb. 1.5), da $PQ \parallel P'Q'$, da eine Translation eine Dilatation ist und da außerdem $PP' \parallel QQ'$ wegen der obigen Proposition.

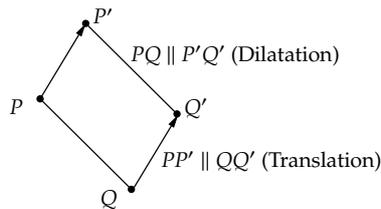


Abbildung 1.5. Zwei Punkte und deren Bilder unter einer Translation formen ein Parallelogramm.

Proposition 1.20. Die Menge $\text{Tran } \mathbb{A}$ der Translationen von \mathbb{A} bildet eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung. Außerdem gilt für jedes $\tau \in \text{Tran } \mathbb{A}$ und $\delta \in \text{Dil } \mathbb{A}$: $\delta\tau\delta^{-1} \in \text{Tran } \mathbb{A}$, d.h. $\text{Tran } \mathbb{A}$ ist ein Normalteiler von $\text{Dil } \mathbb{A}$, in Zeichen: $\text{Tran } \mathbb{A} \triangleleft \text{Dil } \mathbb{A}$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Dilatationen eine Gruppe bilden. Daher ist die Inverse einer Translation $\tau \neq \text{id}$ ebenfalls eine Dilatation; da τ aber keinen Fixpunkt hat, gilt dies natürlich auch für τ^{-1} .

Um zu zeigen, dass $\text{Tran } \mathbb{A}$ eine Gruppe ist, müssen wir also nur noch sehen, dass für zwei Translationen τ und σ auch $\tau \circ \sigma$ nicht nur eine Dilatation, sondern sogar eine Translation ist. Wir nehmen also an, dass $\tau \circ \sigma$ einen Fixpunkt P hat. Bezeichnen wir $\sigma(P)$ mit P' , so folgt: $\tau(P') = P$. Falls nun Q ein Punkt ist, der nicht auf PP' liegt, so bezeichnen wir $\sigma(Q)$ mit Q' (Abb. 1.6) und wir müssen zeigen, dass $Q'' = \tau(Q') = Q$ gilt.

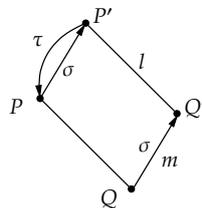


Abbildung 1.6. Konstruktion des Bildpunktes Q' unter einer Translation.

Da σ eine Translation ist, gilt wegen der vorigen Proposition 1.19: $PQ \parallel P'Q'$ und $PP' \parallel QQ'$. D.h.: $Q' = l \cap m$, wobei $P' \ni l \parallel PQ$ und $Q \ni m \parallel PP'$. Nun

ist aber auch τ eine Translation und wir erhalten daher genauso $P'Q' \parallel PQ''$ und $P'P \parallel Q'Q''$ und schließlich $Q'' = PQ \cap QQ' = Q$. Also lässt $\tau \circ \sigma$ zwei Punkte P und Q fest, also $\tau \circ \sigma = \text{id}$ nach Proposition 1.16.

Es bleibt die Normalteiler-Eigenschaft zu zeigen. Seien dazu $\tau \in \text{Tran } \mathbb{A}$ und $\delta \in \text{Dil } \mathbb{A}$. Dann ist $\sigma\tau\sigma^{-1}$ eine Dilatation und eine echte Translation, wenn sie keinen Fixpunkt hat. Hätte sie einen solchen, P , so folgte aus $\sigma\tau\sigma^{-1}(P) = P$ sofort $\tau\sigma^{-1}(P) = \sigma^{-1}(P)$, also hätte die Translation τ den Fixpunkt $\sigma^{-1}(P)$, d.h. $\tau = \text{id}$ und somit auch $\sigma\tau\sigma^{-1} = \text{id}$. Jedenfalls ist $\sigma\tau\sigma^{-1}$ eine Translation. \square

1.3 Zwei Grundlegende Sätze der reellen affinen Geometrie

In der reellen affinen Ebene, die uns ja vornehmlich interessiert, gelten viele sehr schöne Sätze, von denen wir in diesem Abschnitt zwei vorstellen werden, nämlich den Satz von Pappus¹ und jenen von Desargues. Beide sind Aussagen über gewisse Konfigurationen von Geraden und Punkten. Auch über solche Konfigurationen könnten wir hier wesentlich mehr erzählen, wir möchten aber nur auf das dritte Kapitel des wunderbaren Buches [HCV32] verweisen. Dort wird selbstverständlich nur ein recht informeller Einblick über das Thema gegeben, dafür aber ein besonders anschaulicher.

In beiden Beweisen verwenden wir Eigenschaften über Streckungen, die nicht in jeder affinen Ebene gelten. Wir werden auf diese Problematik im Abschnitt über projektive Ebenen noch genauer eingehen. Dort wird uns auch klar werden, warum die Sätze von Pappus und Desargues so wichtig sind.

Der Satz von Pappus in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Wir werden diesen Satz hier nicht in seiner ganzen Allgemeinheit beweisen, sondern nur in einem Spezialfall. Dies liegt daran, dass wir später nur genau diesen einfachen Fall benötigen, um den noch allgemeineren Fall in der projektiven Ebene zu beweisen. Dort wird uns auch erst die wirkliche Relevanz dieses Resultates deutlich werden. Für den Beweis des Satzes verwenden wir die Kommutativität zweier Streckungen, die das gleiche Zentrum besitzen.

Satz 1.21 (Der Satz von Pappus in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, ein Spezialfall). *Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden g und A', B', C' drei Punkte auf einer Geraden $g' \neq g$. Falls $AB' \parallel BA'$ und $BC' \parallel CB'$, so gilt: $AC' \parallel CA'$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass $g \nparallel g'$. Dann haben sie einen eindeutigen Schnittpunkt O . Sei φ die Streckung mit Zentrum O mit $\varphi(A) = B$ und

¹Pappus (auch: Pappos) lebte in Alexandria (heutiges Ägypten), etwa 290 n.Chr. – 350 n.Chr., siehe [OR07, SS02]

sei ψ jene Streckung mit Zentrum O mit $\psi(B) = C$, also $\psi(\varphi(A)) = C$. Dann ist $\varphi(B') = A'$ und $\psi(C') = B'$, also insgesamt $\varphi(\psi(C')) = A'$. Da aber zwei Streckungen mit dem gleichen Zentrum kommutieren, folgt für die Streckung $\eta = \varphi \circ \psi$ mit Zentrum O : $\eta(A) = C$ und $\eta(C') = A'$, also $AC' \parallel CA'$, da η eine Dilatation ist. Sind g und g' parallel, so kann man in obiger Argumentation Streckungen mit Translationen vertauschen. \square

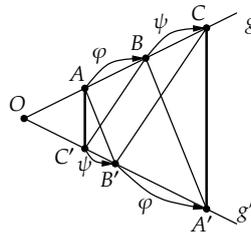


Abbildung 1.7. Ein Spezialfall des Satzes von Pappus.

Der Satz von Desargues in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Der Satz von Desargues ist ähnlich wichtig für die Projektive Geometrie wie jener von Pappus, wie wir später sehen werden. Hier zunächst die Version in der reellen affinen Ebene:

Satz 1.22 (Der Satz von Desargues in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke (d.h. alle drei Punkte sind paarweise verschieden) ohne gemeinsame Ecke, deren Seiten jeweils parallel sind (Abb. 1.8). Dann sind die Geraden AA' , BB' und CC' entweder parallel oder sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

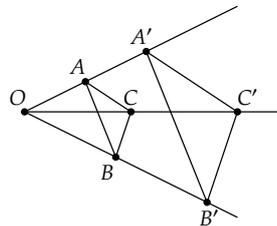


Abbildung 1.8. Der Satz von Desargues.

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Projektive Geometrie

Die Projektive Geometrie ist auf den ersten Blick einfach die Formalisierung der aus der Kunst bekannten Perspektive (Dürer etc.). Auf den zweiten Blick eröffnen sich dem Neugierigen aber weit mehr Eigenschaften als nur jene, dass sich zwei Parallelen im Unendlichen schneiden. Beispielsweise ist das Konzept der Dualität ein sehr faszinierendes und hilfreiches. Wir werden sehen, dass die projektive Geometrie nicht nur eine viel perfektere Welt darstellt als die affine, uns bekannte, sondern dass sie außerdem unser Verständnis der affinen Geometrie wesentlich verbessert.

Im Hinblick auf die Dynamische Geometrie Software wird es uns die Hinzunahme sogenannter unendlich ferner Punkte endlich ermöglichen, auch mit Schnittpunkten paralleler Geraden zurecht zu kommen und somit prinzipiell dieses in der Einleitung erwähnte Problem zu beheben.

Allerdings werden wir sehen, dass bei der zunächst hilfreichen Erweiterung unseres Blickfeldes im Fall der reellen Ebene leider das uns bekannte Konzept des Abstandes nicht funktioniert wie gehabt. Glücklicherweise gibt es aber bereits seit Cayley und Klein eine Lösung dieses Problems, nämlich eine speziell angepasste Metrik.

Die ersten wichtigen Schritte hin zu einer korrekten perspektivischen Darstellung in der Kunst unternahmen die Maler der Renaissance. Einer der berühmtesten ist sicher der Maler und Geometer Albrecht Dürer (1471–1528, Nürnberg). Wie man in der Abbildung 2.1 sehen kann, hatte er die Idee, dass man ein korrektes dreidimensional erscheinendes ebenes Bild eines dreidimensionalen Gegenstandes dann erhält, wenn man das Objekt von einem Punkt aus anschaut und die Verbindungsgeraden Auge – Objektpunkte mit der Zeichenebene schneidet.

Dieser Zugang führt, wie wir sehen werden, auf natürliche Weise zu sogenannten homogenen Koordinaten für die projektive Ebene. Ist das betrachtete Objekt beispielsweise eine gerade verlaufende Bahnlinie, so werden sich

3. Vorl. — 07. Nov. '07
Projektive Geometrie,
Verhältnis zu affiner

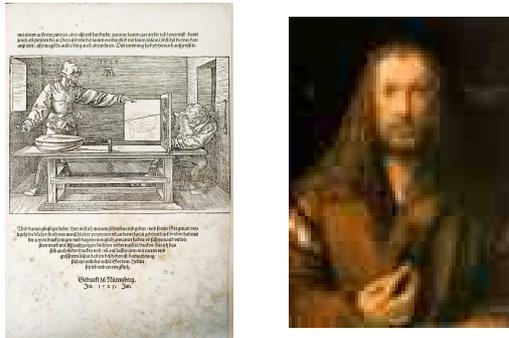


Abbildung 2.1. Links: Aus Dürers Buch zur Perspektive (1525), Graphik gefunden auf www.aip.de. Rechts: Eines von Dürers Selbstportraits, gefunden im WebMuseum auf www.navigo.com

deren parallele Gleise auf dem Zeichenblatt am Horizont in einem Punkt treffen.¹

Zum konzeptuell gleichen Ergebnis kommt man, wenn man feststellt, dass sich zwei Geraden fast immer in genau einem Punkt schneiden und dass diese Eigenschaft doch am Besten immer gelten sollte. Dies führt nämlich natürlicherweise dazu, dass man einfach für jede Richtung paralleler Geraden einen idealen Schnittpunkt „im Unendlichen“ hinzunimmt. Diese Idee kann man tatsächlich zu einem sinnvollen Konzept ausbauen, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

Wir werden außerdem beweisen, dass beide Zugänge — über die Perspektive und über die Idee der abstrakten Schönheit der Mathematik — tatsächlich zu isomorphen Begriffen von projektiven Ebenen führen.

2.1 Die Projektive Ebene als Vervollständigung der Affinen

Wir beschreiben nun zunächst den Zugang zur projektiven Ebene, der versucht, das abstrakte Konzept von ebener Geometrie möglichst perfekt zu realisieren, d.h. einfach Schnittpunkte von Geraden hinzuzunehmen, wenn es keine gibt, damit sich zwei Geraden immer in genau einem Punkt schneiden.

Definition 2.1. Sei \mathbb{A} eine affine Ebene. Für jede Gerade $l \in \mathbb{A}$ bezeichnen wir mit $[l]$ das **Büschel** aller Geraden, die parallel zu l sind. Für jedes Büschel $[l]$ fügen wir

¹... sofern die Bahntrasse nicht bereits vor Beendigung der Zeichnung stillgelegt wurde und die Gleise durch eine profitablere Autobahn ersetzt worden sind. Doch auch deren Begrenzungen würden sich am Horizont vereinen.

einen **Punkt im Unendlichen** hinzu (auch: **unendlich ferner Punkt** oder **Punkt in der Richtung von l**), notiert: $P_{[l]}$.

Nun definieren wir die **Vervollständigung** $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ von \mathbb{A} folgendermaßen: Die Punkte von $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ sind die Punkte von \mathbb{A} gemeinsam mit den unendlichen fernen Punkten von \mathbb{A} . Eine **Gerade** in $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ ist entweder eine **gewöhnliche Gerade**, d.h. eine Gerade $l \in \mathbb{A}$ gemeinsam mit $P_{[l]}$ oder aber die **unendlich ferne Gerade**, die genau aus allen unendlich fernen Punkten von \mathbb{A} besteht (Abb. 2.2).

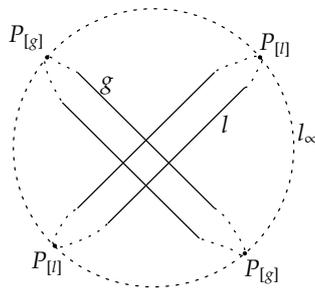


Abbildung 2.2. Vervollständigung der reellen affinen Ebene.

Diese naive Idee liefert tatsächlich etwas Sinnvolles; die so definierte Vervollständigung erfüllt nämlich die Axiome einer projektiven Ebene, wie wir gleich (Prop. 2.3) sehen werden.

Definition 2.2. Eine **projektive Ebene** \mathbb{P} ist eine Menge, deren Elemente wir **Punkte** nennen, gemeinsam mit einer Menge von Untermengen, genannt **Geraden**, die die folgenden Axiome erfüllen:

P1 Zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{P}$ liegen auf genau einer Geraden.

P2 Zwei verschiedene Geraden treffen sich in genau einem Punkt.

P3 Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

P4 Jede Gerade enthält wenigstens drei Punkte.

Zwei Projektive Ebenen \mathbb{P} und \mathbb{P}' sind **isomorph** (in Zeichen: $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}'$), falls es eine bijektive Abbildung $T: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ gibt, die kollineare Punkte auf kollineare Punkte abbildet. T heißt dann **Isomorphismus** (und **Automorphismus**, falls $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$).

Aus den Axiomen ist direkt ersichtlich, dass Geometrie in einer solchen Ebene wesentlich näher an eine perfekte Welt herankommt als jene in einer affinen Ebene. Und das Erstaunliche ist nun, dass solche projektiven Ebenen wirklich existieren und dass man sie mit der obigen Vervollständigung sogar sehr einfach aus den affinen Ebenen erhalten kann:

Proposition 2.3. *Die Vervollständigung $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ einer affinen Ebene \mathbb{A} ist eine projektive Ebene.*

Beweis. Wir müssen die vier Axiome verifizieren:

P1 Seien $P, Q, \in \mathbb{S}(\mathbb{A})$ zwei verschiedene Punkte. Es gibt drei Fälle:

1. P und Q sind gewöhnliche Punkte von \mathbb{A} . Dann liegen P und Q auf genau einer Geraden von \mathbb{A} und sie liegen nicht auf der unendlich fernen Geraden von $\mathbb{S}(\mathbb{A})$.
2. Q ist ein gewöhnlicher Punkt von \mathbb{A} und P ein unendlich ferner Punkt, also $P = P_{[l]}$ für eine Gerade l . Dann liefert A2 eine Parallele $m \parallel l$ mit $Q \in m$, d.h. $l \neq m \in [l]$. $P \cup m$ ist also eine Gerade durch $P = P_{[l]} = P_{[m]}$ und Q und offenbar auch die einzige.
3. P und Q sind unendlich ferne Punkte. Dann liegen beide auf der unendlich fernen Geraden und dies ist nach Definition auch die einzige, die beide Punkte enthält.

P2 Seien l, m Geraden. Auch hier müssen wir Fälle unterscheiden:

1. l und m sind gewöhnliche Geraden von $\mathbb{S}(\mathbb{A})$. Ist $l \nparallel m$, so schneiden sich l und m in einem Punkt von \mathbb{A} . Ist $l \parallel m$, so liegt $P_{[l]}$ sowohl auf l als auch auf m .
2. Ist l eine gewöhnliche Gerade von $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ und l_∞ die unendlich ferne Gerade, so liegt $P_{[l]}$ auf beiden Geraden.

P3 A3 liefert drei nicht kollineare Punkte $P, Q, R \in \mathbb{A}$. Diese sind aber auch in $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ nicht kollinear, da die einzige neue Gerade l_∞ ist; diese enthält aber keinen der Punkte, also auch nicht alle drei.

P4 Jede Gerade von \mathbb{A} enthält wenigstens zwei Punkte; zusätzlich hat jede gewöhnliche Gerade von $\mathbb{S}(\mathbb{A})$ einen unendlich fernen Punkt. Wir müssen nur noch sehen, dass es wenigstens drei unendlich ferne Punkte gibt. Doch man sieht sofort, dass für drei nicht-kollineare Punkte $P, Q, R \in \mathbb{A}$ gilt, dass keine zwei der Verbindungsgeraden parallel sind.

□

Beispiel 2.4 (Die reelle projektive Ebene). Vervollständigen wir die gewöhnliche reelle affine Ebene, so erhalten wir die sogenannte **reelle projektive Ebene**. Da parallele Geraden in der reellen affinen Ebene die gleiche Steigung besitzen und da umgekehrt gleiche Steigung Parallelität impliziert, können wir die unendlich fernen Punkte identifizieren mit einer Steigungs-Koordinate m , wobei $-\infty < m \leq \infty$ (s. Abb. 2.3). □

Beispiel 2.5. Vervollständigen wir die affine Ebene mit 4 Punkten, so erhalten wir eine projektive Ebene mit 7 Punkten (s. Abb. 2.4). Wie schon in der

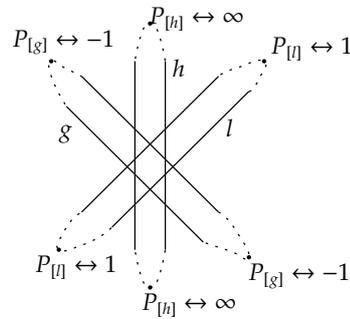


Abbildung 2.3. Parallelenbündel ↔ Steigung

Lösung zu Übungsaufgabe 5 gesagt, kann man endliche projektive Ebenen als symmetrische Block Designs auffassen. Daher wundert es nicht, dass die in der Abbildung gezeigte Inzidenzmatrix symmetrisch ist. \square

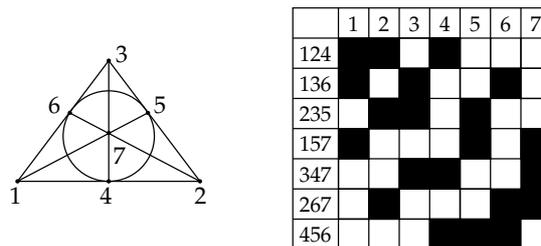


Abbildung 2.4. Eine Projektive Ebene mit 7 Punkten.

2.2 $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Wir möchten nun die Beziehung zwischen affinen und projektiven Ebenen untersuchen. Wir haben ja bereits gesehen, dass man eine affine Ebene vervollständigen kann und eine projektive erhält. Hier werden wir nun sehen, dass es häufig auch sehr sinnvoll sein kann, den umgekehrten Weg zu gehen. Beispielsweise werden wir mit dieser Taktik den Satz von Pappus beweisen.

2.2.1 Definition von $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Wir erhalten ebenfalls eine projektive Ebene, wenn wir die folgende Quotientenkonstruktion durchführen. Mit dieser Konstruktion werden wir die

meisten Aussagen, die wir über projektive Ebenen machen werden, auf lineare Algebra zurückführen können:

Proposition/Definition 2.6. Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Wir betrachten die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von V und die Menge der zweidimensionalen Untervektorräume von V . Diese bilden die Punkte bzw. Geraden einer projektiven Ebene, notiert $\mathbb{P}(V)$ oder auch $\mathbb{P}^2(K)$, wenn uns die Unterscheidung zwischen isomorphen V_1 und V_2 nicht wichtig ist..

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 2.7. Für $K = \mathbb{F}_2$, der Körper mit zwei Elementen, ergibt sich eine projektive Ebene mit 7 Punkten, die isomorph zur oben angegebenen Ebene mit 7 Punkten ist, wie sich leicht nachprüfen lässt □

Beispiel 2.8. Ein drei-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $K = \mathbb{F}_n$ mit $n = p^k$, wobei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, besitzt genau $n^2 + n + 1$ paarweise nicht kollineare Vektoren:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{F}_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_n \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach der Proposition gibt es also Projektive Ebenen mit $n^2 + n + 1$ Punkten. n nennt man auch **Ordnung der endlichen projektiven Ebene**. Es ist ein noch ungelöstes Problem, ob es eine endliche projektive Ebene von Nicht-Primzahlpotenz-Ordnung gibt! □

Beispiel 2.9. Für $K = \mathbb{R}$ ergibt sich eine reelle projektive Ebene (Abb. 2.5, siehe [BL06, Nr. 3] für eine Animation). Wir werden sehen, dass diese im Wesentlichen der vorigen reellen projektiven Ebene entspricht. □

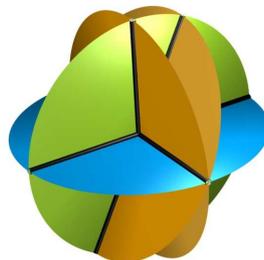


Abbildung 2.5. Einige Objekte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: vier Geraden (also Ursprungsebenen im \mathbb{R}^3) und deren Schnittpunkte (also Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^3).

2.2.2 Das Sphärenmodell

Häufig ist es hilfreich, sich die reelle projektive Ebene als Punkte auf der Sphäre zu veranschaulichen:

Proposition/Definition 2.10 (Das Sphärenmodell von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Sei $\mathcal{S}' = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 (Abb. 2.6). Die Punkte in \mathcal{S}' sind Paare $\pm(x_1, x_2, x_3)$ von gegenüberliegenden Punkten und die Geraden in \mathcal{S}' sind Großkreise. \mathcal{S}' ist isomorph zu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Wir nennen \mathcal{S}' das **Sphärenmodell** von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

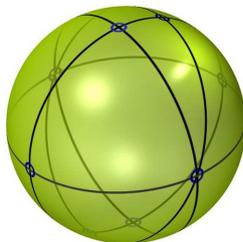


Abbildung 2.6. Einige Objekte im Sphärenmodell: vier Geraden (also Großkreise auf S^2 und deren Schnittpunkte (also gegenüberliegende Punkte auf S^2).

Beweis. Eine Ursprungsebene schneidet S^2 in zwei gegenüberliegenden Punkten und durch zwei solche Punkte geht genau eine Ursprungsebene im \mathbb{R}^3 . Dies ist offenbar ein Isomorphismus von \mathcal{S}' auf $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und dessen Umkehrabbildung. Um dies zu sehen, müssen wir nur bemerken, dass eine Ursprungsebene S^2 in einem Großkreis schneidet und dass umgekehrt durch alle Punkte eines Großkreises genau eine Ursprungsebene geht. \square

Das Sphärenmodell ist besonders praktisch, wenn man mehrere Objekte gemeinsam in der reellen projektiven Ebene veranschaulichen möchte, da die Darstellung der projektiven Punkte als Ursprungsebene schnell unübersichtlich wird und da eine affine Ansicht die Punkte der unendlich fernen Geraden nicht sichtbar macht. Daher verwendet auch \mathbb{C} das Sphärenmodell als projektive Ansicht.

Bemerkung 2.11. Wir haben gesehen, dass man durch Vervollständigung einer affinen Ebene \mathbb{A} eine projektive Ebene $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ erhält.

- Umgekehrt ergibt sich für jede projektive Ebene \mathbb{P} und projektive Gerade $l \in \mathbb{P}$ eine affine Ebene $\mathbb{P} \setminus l$: deren Geraden sind die Geraden g von \mathbb{P} , allerdings ohne deren Punkt $g \cap l$ auf l . Außerdem ist $\mathcal{S}(\mathbb{P} \setminus l) \cong \mathbb{P}$ für alle Geraden l .

2. Umgekehrt gilt $\mathcal{S}(\mathbb{A}) \setminus l_\infty = \mathbb{A}$, wobei l_∞ die unendlich ferne Gerade von \mathbb{A} ist.
3. Man kann zeigen, dass für eine große Klasse affiner Ebenen sogar $\mathcal{S}(\mathbb{A}) \setminus l \cong \mathbb{A}$ für jede Gerade l gilt und dass für diese Klasse von Ebenen die Abbildungen $A \mapsto \mathcal{S}(A)$ und $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P} \setminus l$ invers zueinander sind.

Beweis. 1. Übungsaufgabe, 2. folgt aus den Definitionen, 3. [KK96, Kap. 9]. □

2.2.3 Die Projektiven Sätze von Pappus und Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Häufig werden wir das eben beschriebene Verhältnis von affinen und projektiven Ebenen benutzen, um Sätze aus der einen Welt mit Hilfe von Sätzen aus der anderen Welt zu beweisen. Ein erstes Beispiel ist der Satz von Pappus:

Satz 2.12 (von Pappus in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Seien g und g' zwei Geraden einer Projektiven Ebene \mathbb{P} . Seien weiter $A, B, C \in g$ drei verschiedene Punkte auf g und $A', B', C' \in g'$ drei verschiedene Punkte auf g' . Seien $S_A = B'C \cap C'B$, $S_B = A'C \cap C'A$, $S_C = AB' \cap BA'$ die Schnittpunkte der Diagonalen. Dann sind S_A, S_B und S_C kollinear (Abb. 2.7).

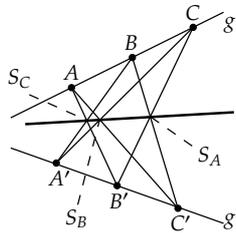


Abbildung 2.7. Der (projektive) Satz von Pappus.

Beweis. Wir betrachten die affine Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus S_A S_C$; dort ist die Gerade $S_A S_C$ die unendlich ferne Gerade. In \mathbb{A} sind also die Geraden $B'C$ und $C'B$ parallel genauso wie $A'B$ und $B'A$. Jetzt können wir den Spezialfall des affinen Satzes von Pappus, nämlich Satz 1.21 anwenden und folgern, dass $A'C$ und $C'A$ parallel sind. Das heißt aber gerade, dass sie sich auch auf der unendlich fernen Geraden schneiden. In \mathbb{P} heißt dies, dass sich $A'C$ und $C'A$ auf $S_A S_C$ schneiden. □

Analog kann man den Satz von Desargues beweisen:

Satz 2.13 (von Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in der $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. (d.h. alle drei Punkte sind jeweils paarweise verschieden) und $A \neq A', B \neq B',$

$C \neq C'$ (siehe Abb. 2.8). Seien $S_A = BC \cap B'C'$, $S_B = AC \cap A'C'$, $S_C = AB \cap A'B'$ die Schnittpunkte entsprechender Seiten. Dann schneiden sich die Geraden AA' , BB' und CC' in einem gemeinsamen Punkt genau dann wenn S_A , S_B und S_C kollinear sind.

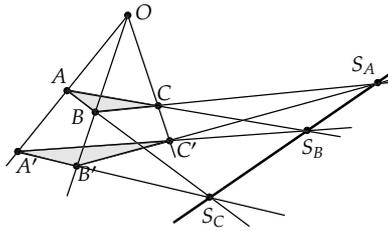


Abbildung 2.8. Der (projektive) Satz von Desargues.

Beweis. Eine Richtung: Übungsaufgabe. Andere Richtung: später, da wir es dann wesentlich eleganter verstehen können. \square

2.3 Homogene Koordinaten für $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Wir haben schon in Prop./Def. 2.6 Beispiel 2.9 gesehen, dass man eine reelle projektive Ebene erhält, wenn man Ursprungsgeraden als deren Punkte und Ursprungsebenen als deren Geraden definiert. Jetzt möchten wir geeignete Koordinaten für diese Objekte einführen.

4. Vorl. — 14. Nov. '07
Homogene Koordinaten

2.3.1 Koordinaten für projektive Punkte

Durch einen Vektor $(0, 0, 0) \neq (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ wird eine Ursprungsgerade g definiert; umgekehrt können wir jeden Punkt $0 \neq p \in g$ als definierenden Vektor verwenden. Die anderen Punkte auf g haben dann die Koordinaten

$$\lambda(p_1, p_2, p_3) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alle diese Punkte $p \in \mathbb{R}^3$ (außer jener mit $\lambda = 0$) definieren also den gleichen projektiven Punkt $q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Als Notation für q führen wir daher ein:

$$q = (q_1 : q_2 : q_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

wobei $q_i \in \mathbb{R}$, aber wenigstens ein $q_i \neq 0$, damit durch die Koordinaten auch eine Ursprungsgerade definiert wird. Anders gesagt ist ein solcher Punkt eine Äquivalenzklasse von Punkten $p \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Äquivalenzrelation \sim mit $p_1 \sim p_2 \iff p_1 = \lambda p_2$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.14. $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. \square

2.3.2 Koordinaten für projektive Geraden

Projektive Geraden im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind Ursprungsebenen im \mathbb{R}^3 , also gegeben durch eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \text{ wenigstens ein } a_i \neq 0.$$

Auch hier können wir wieder nicht unterscheiden zwischen skalaren Vielfachen solcher Gleichungen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \iff (\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + (\lambda a_3)x_3 = 0.$$

Außerdem ist dies kompatibel mit der Tatsache, dass Punkte nicht zwischen skalaren Vielfachen unterscheiden können:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \iff a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + a_3(\lambda x_3) = 0.$$

Wir notieren deshalb kurz eine solche Gerade $(a_1 : a_2 : a_3)$, analog zur Notation der Punkte.

Beispiel 2.15. Sei $g = (1 : 2 : 4)$ eine projektive Gerade im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Der Punkt $p = (2 : 1 : -1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ liegt auf ihr, denn $g|_{x=p} = 2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 0$. Gleiches gilt natürlich für den Punkt $q = 2p = p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: $g|_{x=q} = 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = 0$ und $r = \lambda p = p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$. \square

2.3.3 Die reelle projektive Ebene

Mit Hilfe der eben eingeführten Koordinaten zeigen wir nun, dass $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und die Vervollständigung von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ im Wesentlichen das Gleiche liefern:

Proposition 2.16. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und die Vervollständigung von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sind isomorph:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}(\mathbb{A}^2(\mathbb{R})).$$

Beweis. Die Koordinaten von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit x_1, x_2, x_3 , jene von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit x, y . Die Vervollständigung $\mathbb{S}(\mathbb{A}(\mathbb{R}))$ enthält die Punkte (x, y) von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ und die unendlich fernen Punkte, die wir mit der Steigung $m \in \mathbb{R} \cup \infty$ der entsprechenden Parallelenbüschel beschreiben.

Wir geben nun explizit einen Isomorphismus $T: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$ an (s. Abb. 2.9). Sei dazu $p = (p_1 : p_2 : p_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1. $p_3 \neq 0$: Wir definieren $T(p)$ als den Punkt (x, y) von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit

$$(x, y) = \left(\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3} \right).$$

Dies ist wohldefiniert, da sich für λp der selbe Bildpunkt ergibt. Auf diese Weise können wir natürlich jeden Punkt von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ erhalten, z.B. für $p = (x, y, 1)$.

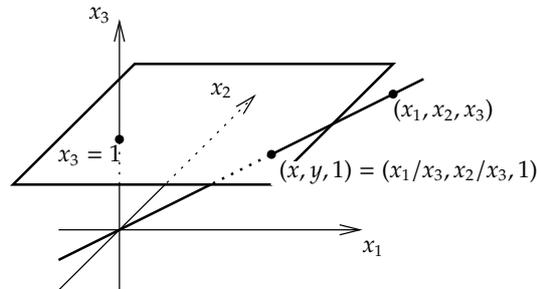


Abbildung 2.9. Kanonische Einbettung von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^3 vermöge T .

2. $p_3 = 0$: Wir definieren $T(p)$ als den unendlich fernen Punkt von $\mathcal{S}(\mathbb{A}^2(\mathbb{R}))$ mit Steigung $m = \frac{p_2}{p_1}$, wobei wir $m = \frac{p_2}{0} = \infty$ setzen (in diesem Fall ist ja $p_2 \neq 0$). Auch hier liefert λp das gleiche Resultat und jeden Wert von m können wir erhalten: Für $m \neq \infty$ können wir $T(1, m, 0)$ nehmen, für $m = \infty$ $T(0, 1, 0)$.

Wir müssen nun noch überprüfen, dass diese bijektive Abbildung T tatsächlich kollineare Punkte auf ebensolche abbildet. Eine Gerade in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist gegeben durch eine Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \text{wenigstens ein } a_i \neq 0.$$

1. $a_1 = a_2 = 0$: Jeder der Bildpunkte der Geraden (mit Gleichung $x_3 = 0$) liegt nach unserer Konstruktion auf der unendlich fernen Geraden.
2. $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$: Für die Punkte p auf der Geraden, deren dritte Koordinate $p_3 = 0$ ist, also für die Punkte $p = (\lambda a_2, -\lambda a_1)$, werden auf den unendlich fernen Punkt mit $m = \frac{-a_1}{a_2}$ abgebildet. Um die anderen Bildpunkte zu erhalten, können wir p_3 auf 1 normieren; es ergeben sich die Bilder (p_1, p_2) , die alle auf der Geraden $a_1x + a_2y + a_3$ von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ liegen. Diese hat aber Steigung $\frac{-a_1}{a_2}$.

□

Bemerkung/Definition 2.17. 1. Im Beweis wurde ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ auf $(x : y : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ abgebildet. Diese Abbildung nennt man **kanonische Einbettung** $\iota: \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Das Bild einer Geraden unter dieser Abbildung nennen wir den **projektiven Abschluss** dieser Geraden. Dies ist offenbar auch der topologische Abschluss der affinen eingebetteten Geraden, was man beispielsweise am Sphärenmodell leicht sieht.

2. Wegen der obigen Proposition 2.16 sprechen wir von nun an von der reellen projektiven Ebene.

Beispiel 2.18. Wir betrachten die beiden Geraden $g, g' \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit $g = x + y - 1$, $g' = x + y + 1$. Wir denken uns die affine Ebene eingebettet in den \mathbb{R}^3 als die Ebene $x_3 = 1$ und fragen uns, welchen Schnittpunkt g und g' in dem zugehörigen projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ haben.

Dazu müssen wir zunächst Gleichungen der g und g' entsprechenden projektiven Geraden, h und h' , finden. Wir ersetzen also x durch $\frac{x_1}{x_3}$ und y durch $\frac{x_2}{x_3}$ wie im Beweis. Um wieder Polynome zu erhalten, multiplizieren wir mit x_3 und finden $h = x_1 + x_2 - x_3$ bzw. $h' = x_1 + x_2 + x_3$. Kurz heißt dies: $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot g(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ und analog für h' . Gleichsetzen liefert $-x_3 = x_3$, also $x_3 = 0$; insgesamt also $x_3 = 0$ und $x_1 + x_2 = 0$, d.h. $h \cap h' = (1 : -1 : 0)$. \square

Beispiel 2.19. Sei $k: x^2 + y^2 - 1 = 0$ der Einheitskreis mit Zentrum $(0, 0)$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Eingebettet mit der kanonischen Einbettung in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ erhalten wir die Gleichung $(\frac{x_1}{x_3})^2 + (\frac{x_2}{x_3})^2 = 1$, also $\bar{k}: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ als definierendes Polynom des entsprechenden projektiven Objektes, dieses beschreibt einen Doppelkegel im \mathbb{R}^3 . Wählen wir nun andere unendlich ferne Geraden als $z = 0$, so erhalten wir auch andere affine Objekte (Abb. 2.10):

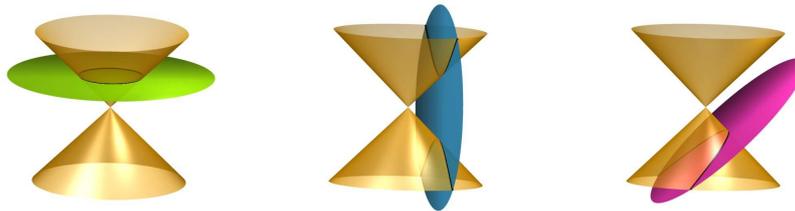


Abbildung 2.10. Affine Kegelschnitte.

$x_1 = 0$ ist ∞ ferne Gerade: D.h., wir müssen einen Schnitt des Doppelkegels mit einer dazu parallelen Ebene betrachten, z.B. $x_1 = 1$, um das entsprechende affine Bild zu bekommen (denn in dieser Ebene gibt es keine Punkte mit $x_1 = 0$). Wir erhalten: $1 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, eine Hyperbel.

$x_1 + x_3 = 0$ ist ∞ ferne Gerade: Eine dazu parallele Gerade ist $x_1 + x_3 = 1$, was ergibt: $x_3 = 1 - x_1$, also $x_1^2 + x_2^2 - (1 - x_1)^2 = x_1^2 + 2x_1 - 1 \iff x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2^2)$. Das ist eine Parabel.

Wir sehen also, dass wir im Wesentlichen alle affinen Kegelschnitte als affine Versionen des projektiven Kegelschnittes $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ erhalten. Später werden wir noch näher auf die Klassifikation der affinen und projektiven Kegelschnitte eingehen. \square

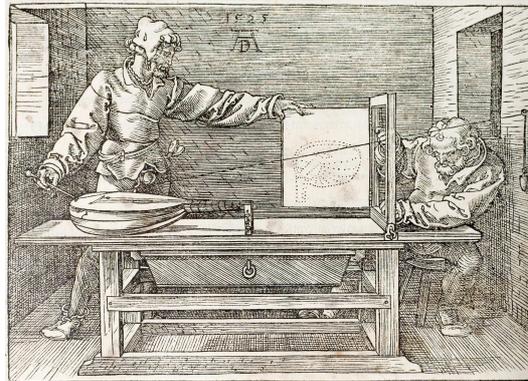


Abbildung 2.11. Aus Dürers Buch zur Perspektive (1525), Graphik gefunden auf www.aip.de.

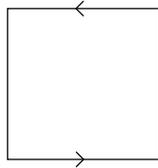
Bemerkung/Definition 2.20 (Zusammenhang mit Dürers Ideen). Wir betrachten noch einmal Dürers Bild (Abb. 2.11). Dies ist offenbar einfach nur der Übergang von einer affinen Ansicht auf eine andere affine Ansicht des projektiven Objektes. Der Ursprung des Koordinatensystems entspricht hierbei dem Auge des Betrachters (das zweite Auge wird hierbei unterschlagen!).

Hat man für eine solche Ansicht einer projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ eine Ebene $E \subset \mathbb{K}^3$ (und daher auch die dazu parallele Ebene durch den Ursprung, die dann der unendlich fernen Geraden entspricht) gewählt, um eine affine Ansicht der projektiven Ebene zu erhalten, so bezeichnet man diese als **Karte**. Offenbar kann man die alle Punkte der projektiven Ebene schon mit Hilfe von drei Ebenen erhalten, z.B. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$. Jeden Punkt (und auch eine Umgebung) der projektiven Ebene kann man also vermöge einer dieser Karten im Endlichen betrachten. Dürers Bild erklärt also, dass man zum perspektivischen Zeichnen eigentlich nur die affine Karte wechselt, in der man das projektive Objekt betrachtet.

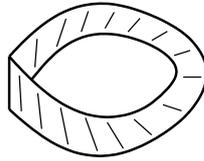
2.4 Topologie der reellen projektiven Ebene

2.4.1 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \text{Möbiusband} \cup \text{Kreisscheibe}$

Mit Hilfe des Sphärenmodells der reellen projektiven Ebene können wir deren Topologie recht gut verstehen (siehe mein Skript *Algebraische Topologie* [LS07] für mehr Informationen hierzu). Wir können das **Möbiusband** nämlich als Teilmenge des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ erkennen mit: $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \text{Möbiusband} \cup \text{Kreisscheibe}$. Das Möbiusband ist hierbei der topologische Raum, der entsteht, indem wir zwei gegenüberliegende Seiten des kompakten Einheitsquadrates entsprechend der Abbildung 2.12 identifizieren.



Das Einheitsquadrat.



Das Möbiusband.

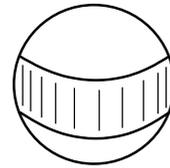
Die Sphäre S^2 .

Abbildung 2.12. Das Möbiusband als Bild des Einheitsquadrats und als Teil des $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ unter der Überlagerung $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2.4.2 Die Boy'sche Fläche

Diese Topologie macht es unmöglich, den reellen projektiven Raum in \mathbb{R}^3 einzubetten: Möchte man ihn trotzdem im \mathbb{R}^3 darstellen, so ergeben sich Selbstdurchdringungen. Sehr schön sieht man das an der Boy'schen Fläche (Werner Boy, konstruiert 1901 in seiner Dissertation), die als Modell vor dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach steht (siehe www.mfo.de). Abb. 2.13 zeigt ebenfalls eine Ansicht dieser Fläche; für weitere Flächen, die ich für SuSE Linux erstellt habe, siehe meine Webseite www.OliverLabs.net/suse/.



Abbildung 2.13. Die Boy'sche Fläche, einmal als Skulptur vor dem MFO (siehe www.mfo.de) und einmal mein Titelbild der SuSE Linux 8.2 Distribution..

2.4.3 Kompaktheit

Als Quotient der kompakten Sphäre ist die reelle projektive Ebene ebenfalls kompakt. Das hat für unsere Anwendung in der dynamischen Geometrie

große Vorteile für die Visualisierung von Ortskurven: Ein Punkt, der auf einer projektiven Geraden mit einer konstanten Geschwindigkeit läuft, kommt nach einer endlichen Zeit wieder an seiner Ausgangsposition an!

2.5 Reelle Kegelschnitte und Quadriken — eine Übersicht

Da Kegelschnitte in allen dynamischen Geometrie Programmen verfügbar sind, da sie außerdem auch in der Schule besprochen werden können und da sie besonders schön das Verhältnis von affiner und projektiver Geometrie verdeutlichen, besprechen wir nun diese Kurven etwas genauer. Da aber die affine Klassifikation der reellen Kegelschnitte in Vorlesungen über lineare Algebra bereits erläutert wird, geben wir hierüber nur einen kurzen Abriss und erläutern dann, wie man diese Ergebnisse auf den projektiven Fall anwenden kann.

5. Vorl. — 21. Nov. '07
Kegelschnitte und
Quadriken — eine
Übersicht

2.5.1 Symmetrische Matrizen

Da sich Kegelschnitte und allgemeiner Quadriken sehr gut mit Hilfe von symmetrischen Matrizen verstehen lassen, wiederholen wir hier kurz die wichtigsten dafür benötigten Ergebnisse. In jedem Buch über lineare Algebra kann man dies nachlesen, genauso wie im online verfügbaren Skript [Sch06] von F.-O. Schreyer zur Mathematik für Informatiker 2 (Kapitel 9,10).

Definition 2.21. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$${}^t A = A, (\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j).$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn

$$\langle Az, w \rangle = \langle z, Aw \rangle \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Dabei ist das hermitesche Skalarprodukt definiert durch:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j, \quad z, w \in \mathbb{C}^n,$$

wobei \bar{z} das komplexe Konjugierte von $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet. D.h. insbesondere: $\langle v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$, aber $\langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$.

Bemerkung 2.22. Sei $A \in K^{n \times n}$. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass A symmetrisch äquivalent ist zu: $({}^t x {}^t A)y = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = ({}^t x)Ay \quad \forall x, y$. Jede reelle symmetrische Matrix ist daher hermitesch. Ebenso kann man nachrechnen, dass A hermitesch äquivalent ist zu $A = {}^t \bar{A}$, was ebenso impliziert, dass jede symmetrische Matrix hermitesch ist.

Satz 2.23. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reelle symmetrische oder hermitesche Matrix. Dann hat A nur reelle Eigenwerte.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zu λ . Also $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Dann gilt:

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Dies zeigt: $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, das heißt: $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Die Grundlage für die Klassifikation der Quadriken bildet der folgende Satz. Wie üblich bezeichnet dort $SO(n) \subset O(n)$ die normale Untergruppe der reellen orthogonalen Matrizen mit Determinante 1, wobei $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = A {}^tA = \text{id}\}$ (d.h. $A \in O(n) \Rightarrow \det(A) \in \{\pm 1\}$).

Satz 2.24 (Hauptachsentransformation). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann existiert eine orthogonale Matrix $S \in SO(n)$, so dass

$${}^tSAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei λ_i die (zwingenderweise reellen) Eigenwerte der Matrix sind.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor mit Länge $\|v\| = 1$. Sei $W = v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0\}$ (s. Abb. 2.14). Wir zeigen:

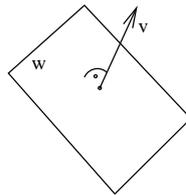


Abbildung 2.14. Das orthogonale Komplement $W = v^\perp$ eines Vektors v .

$Aw \in W \forall w \in W$.

$$\begin{aligned} \langle Aw, v \rangle &= \langle w, Av \rangle && \text{(weil } A \text{ symmetrisch ist)} \\ &= \langle w, \lambda v \rangle && \text{(weil } v \text{ ein Eigenvektor ist)} \\ &= \lambda \langle w, v \rangle && \text{(Skalarprodukt)} \\ &= \lambda \cdot 0 && \text{(weil } w \perp v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt: $Aw \in v^\perp = W$.

Wir wählen nun eine Basis von W aus zueinander senkrecht stehenden normierten Vektoren v_2, \dots, v_n . Wir setzen $v_1 := v$ und $S := (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Damit gilt: $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \forall i$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \forall i \neq j$. Wir setzen: $w_j := Av_j \in W$, $j = 2, \dots, n$. Damit ergibt sich:

$${}^tSAS = {}^tS(\lambda v_1, w_2, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & B & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ symmetrisch ist. Da $S \in \text{O}(n)$ können wir durch Übergang von v zu $-v$ sogar $S \in \text{SO}(n)$ erreichen. \square

2.5.2 Klassifikation von Quadriken

Definition 2.25. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0.$$

In Matrixschreibweise:

$$q(x) = {}^t xAx + {}^t b \cdot x + c$$

wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch gewählt sei.

Die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & \frac{b_1}{2} & \dots & \frac{b_n}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_n}{2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

heißt erweiterte Matrix von q . Damit gilt dann:

$$q(x) = (1, x_1, \dots, x_n) \cdot \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Satz 2.26 (Klassifikation von Quadriken). Sei $q(x) = {}^t xAx + {}^t bx + c$ ein quadratisches Polynom. \tilde{A} die erweiterte Matrix. Dann gibt es eine **Bewegung** $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(y) = Sy + t, \quad S \in \text{SO}(n), t \in \mathbb{R}^n,$$

so dass $q(f(y)) = 0$ zu einer der folgenden Gleichungen äquivalent ist. Dabei schreiben wir: $m = \text{rang } A$, $\tilde{m} = \text{rang } \tilde{A}$:

(a) ($\tilde{m} = m$)

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \dots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = 0,$$

(b) ($\tilde{m} = m + 1$)

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \dots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = 1,$$

(c) ($\tilde{m} = m + 2$)

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \dots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = y_{m+1}.$$

Hierbei sind $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_{>0}$ Konstanten und $0 \leq k \leq m$.

Beweis. Nach dem Satz 2.24 über die Hauptachsentransformation $\exists S \in \text{SO}(n)$, so dass

$${}^tSAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

Ist k die Anzahl der positiven Eigenwerte, $m = \text{rang } A$, dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\alpha_k^2} & & & \\ & & & -\frac{1}{\alpha_{k+1}^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\frac{1}{\alpha_n^2} \end{pmatrix}.$$

Die Einführung neuer Koordinaten $x = Sy$ und eine Translation erhält man schließlich die Behauptung; siehe [Sch06, S. 124f] für Details. \square

Affine Kegelschnitte $n = 2$ haben viele interessante Eigenschaften. Zwei Beispiele:

Bemerkung 2.27. 1. *Ellipsen haben zwei sogenannte Brennpunkte (s. Abb. 2.15): Ein Lichtstrahl, der von einem der beiden Brennpunkte in eine beliebige Richtung ausgesendet wird, wird an der Ellipse so reflektiert, dass er durch den anderen Brennpunkt läuft. Diese Eigenschaft, die auch schon der Grieche Archimedes von rund 2000 Jahren kannte, ist die Grundlage für eine Legende, nach der die Griechen dies eingesetzt hätten, um eine gegnerische Flotte zu versenken.*

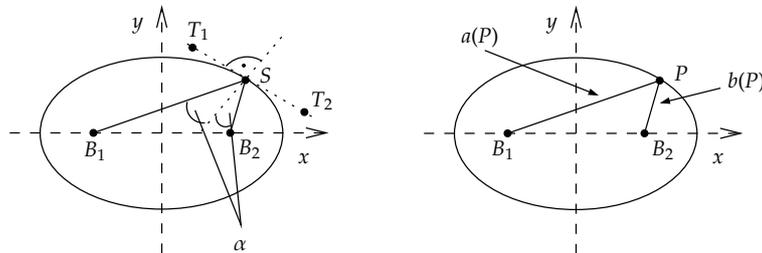


Abbildung 2.15. Brennpunkte von Ellipsen und Gärtnerkonstruktion.

2. Die Summe $a(S) + b(S) = c$ ist konstant für alle Punkte S einer Ellipse. Dies kann man beispielsweise verwenden, um die sogenannte Gärtner-Konstruktion der Ellipse durchzuführen. Man haxe zwei Pflöcke in den Boden (die zukünftigen Brennpunkte B_1, B_2), binde ein Seil der Länge c an diesen beiden Pflöcken fest. Spannt man das Seil mit Hilfe eines kleinen Astes, so kann man diesen Ast auf einer Kurve bewegen, wenn das Seil unter Spannung gehalten wird. Diese Kurve ist eine Ellipse.

Bemerkung 2.28. Erlaubt man statt $S \in SO(n)$ wie im Satz auch beliebige invertierbare Matrizen $S \in GL(n)$, so kann man sogar erreichen, dass alle $\alpha_i = 1$ sind. Dies sieht man, wenn man bemerkt, dass die Ersetzung $\tilde{x}_i = \alpha_i^2 x_i, i = 1, 2, \dots, n$ mit einer solchen Matrix realisierbar ist.

Beispiel/Definition 2.29 (Klassifikation der reellen affinen Kegelschnitte).

Wir werden nun mit Hilfe des Klassifikationssatzes 2.26 die Klassifikation der affinen Kegelschnitte ($n = 2$) durchführen. Zwei Kegelschnitte gehören dabei zur selben **Klasse von affinen Kegelschnitten**, wenn beide auf die selbe Normalformen gebracht werden können (siehe Bemerkung, also $\alpha_i = 1$). Z.B. gehören alle Gleichungen der Form

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\alpha_2^2} = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

zur Klasse der Ellipsen; deren Normalform ist jene mit $\alpha_i = 1$, d.h. $x^2 + y^2 = 1$.

Eine Transformation der Form $Sy + t$ mit $S \in GL(n)$ nennt man **Koordinatentransformation** von \mathbb{R}^n . Ein Kegelschnitt wird in dieser Formulierung Ellipse genannt, wenn es eine Koordinatentransformation gibt, die ihn in die obige Normalform bringt.

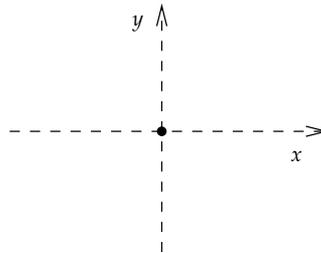
Gehen wir nun alle möglichen Fälle der Werte m, \tilde{m}, k durch. Da $n = 2$, gilt $m = \text{rang}(A) \leq 2$ und $\tilde{m} \leq 3$. Wir geben dabei nicht nur die Normalform, sondern alle Formen für mögliche α_i an, wobei wir statt $\alpha := \alpha_1$ und $\beta := \alpha_2$ setzen:

6. Vorl. — 28. Nov. '07
Klassifikation der Kegelschnitte, Bézout

42 2 Projektive Geometrie

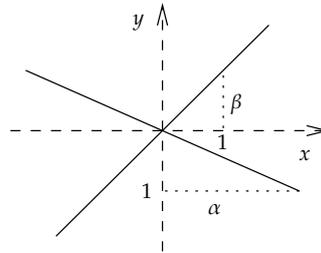
$m = \tilde{m} = 2, k = 2$: Ein Punkt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$$



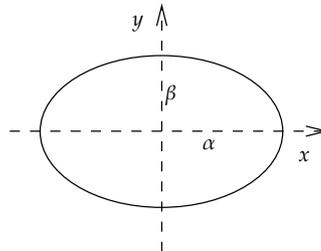
$m = \tilde{m} = 2, k = 1$: Zwei Geraden mit Steigungen $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$:

$$0 = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$



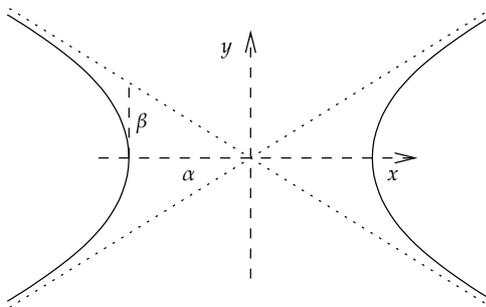
$m = 2, \tilde{m} = 3, k = 2$: Eine Ellipse mit Halbachsen der Längen α, β :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

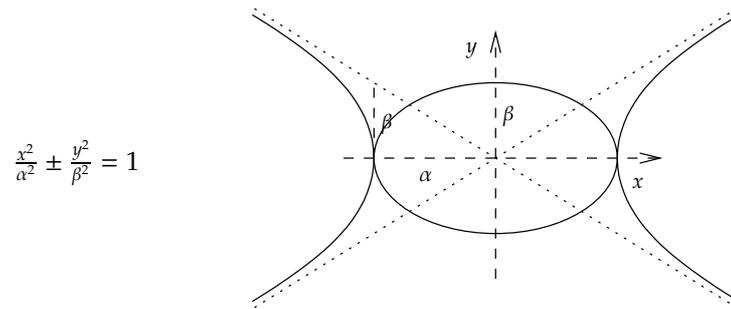


$m = 2, \tilde{m} = 3, k = 1$: Eine Hyperbel mit Halbachsen der Längen α, β :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



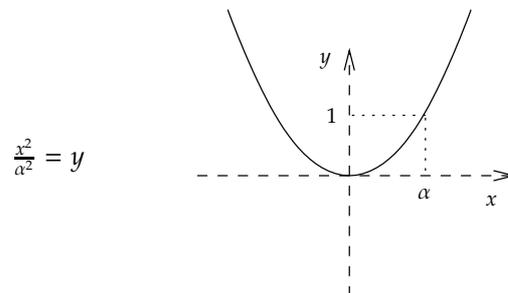
Die folgende Abbildung zeigt Ellipse und Hyperbel mit den gleichen Halbachsen in einem Bild, um deren Zusammenhang deutlich zu machen:



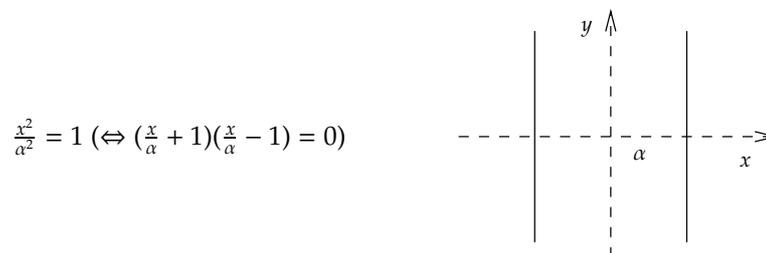
$m = 2, \tilde{m} = 3, k = 0$:

$-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ die leere Menge: \emptyset

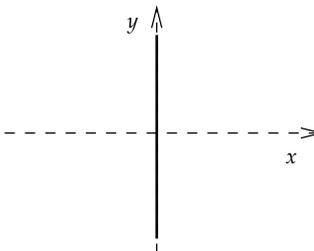
$m = 1, \tilde{m} = 3, k = 1$: Eine Parabel:



$m = 1, \tilde{m} = 2, k = 1$: Zwei Geraden mit Abstand 2α :



$m = 1 = \tilde{m}, k = 1$: Eine doppelte Gerade:

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$


$$m = 1, \tilde{m} = 2, k = 0:$$

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1 : \emptyset \quad \text{die leere Menge: } \emptyset$$

□

Wir werden sehen, dass die projektive Klassifikation ungleich einfacher ist, insbesondere die komplexe:

Beispiel 2.30 (Reelle und komplexe projektive Kegelschnitte). Wie wir bereits gesehen haben (siehe auch Aufgabe 20), werden projektive Kegelschnitte durch **homogene Polynome**, d.h. Polynome, bei denen jeder Term den gleichen Grad (nämlich hier 2) hat, in drei Variablen (x, y plus die **homogenisierende Variable** z) beschrieben. Für solche Polynome gilt aber, dass die Quadrik $q(x) = {}^t xAx + {}^t bx + c$ im Satz 2.26 nur Terme vom Grad 2 hat, d.h. dass $b = {}^t(0, 0, \dots, 0)$ und $c = 0$; dementsprechend ist $m = \text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = \tilde{m}$. Hier ist also nur Fall (a) des Klassifikationssatzes 2.26 relevant.

1. Die Normalformen der reellen projektiven Kegelschnitte sind daher:

$m = 3 = \tilde{m}, k = 2: x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Dies ist ein nichtleerer sogenannter **glatter** oder auch **nicht-degenerierter** Kegelschnitt. Der Fall $k = 1$ liefert das gleiche Objekt, da Durchmultiplizieren mit -1 die Lösungsmenge nicht verändert (siehe Abb. 2.16).



Abbildung 2.16. Ein glatter projektiver Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ wird durch die Punkte eines Kegels im \mathbb{R}^3 gegeben.

$m = 3 = \tilde{m}, k = 3: x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Dies ist die leere Menge, da der Vektor $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ keinen projektiven Punkt definiert. Der Fall $k = 0$ liefert wieder das gleiche Objekt, da auch hier Durchmultiplizieren mit -1 die Lösungsmenge nicht ändert.

$m = 2 = \tilde{m}, k = 2: x^2 + y^2 = 0$. Das ist ein Punkt, und zwar der Punkt $(0 : 0 : 1)$ (Abb. 2.17). Der Fall $k = 0$ liefert wieder das Gleiche.



Abbildung 2.17. Ein projektiver Punkt.

$m = 2 = \tilde{m}, k = 1: x^2 - y^2 = 0$. Das ist ein Geradenpaar (Abb. 2.18).



Abbildung 2.18. Ein projektives Geradenpaar.

$m = 1 = \tilde{m}, k = 1: x^2 = 0$. Das ist eine **doppelt zählende** Gerade (Abb. 2.19). $k = 0$ liefert auch hier nichts Neues.



Abbildung 2.19. Eine doppelt zählende projektive Gerade.

2. Die Normalformen der komplexen Kegelschnitte sind noch schneller aufgeschrieben, da hier das Vorzeichen auch noch wegtransformiert werden kann mit $\tilde{x}_i = i x_i$ (wobei, wie üblich, $i^2 = -1$ die imaginäre Zahl ist). Es ergeben sich also nur die Klassen:

$m = 3 = \tilde{m}$: Glatter Kegelschnitt mit Gleichung $x^2 + y^2 + z^2$.

$m = 2 = \tilde{m}$: Geradenpaar mit Gleichung $x^2 + y^2$.

$m = 1 = \tilde{m}$: Doppelte Gerade mit Gleichung $x^2 = 0$.

□

Wir haben also gesehen, dass es reell projektiv nur eine Sorte von nichtleeren glatten Kegelschnitten gibt! Um dies noch klarer zu machen, betrachten wir noch ein konkreteres Beispiel:

Beispiel 2.31 (Reelle glatte affine und projektive Kegelschnitte). Sei $p: y = x^2 \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ eine affine Parabel. Deren projektiver Abschluss ist $\bar{p}: yz = x^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. In welchen oben aufgeführten Fall fällt dies? Die Koordinatentransformation mit $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{z} - \tilde{y}$, $z = \tilde{y} + \tilde{z}$ liefert: $\tilde{p}: (\tilde{z} - \tilde{y}) \cdot (\tilde{y} + \tilde{z}) = \tilde{x}^2$. D.h.: $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2$. Die Existenz einer solchen Koordinatentransformation liegt genau daran, dass man eine Parabel auch als Kegelschnitt erhält (siehe auch Abb. 2.20)! \square



Abbildung 2.20. Der projektive glatte Kegelschnitt: affine Karten liefern jeden glatten affinen Kegelschnitt. Projektiv gibt es nur eine Klasse von glatten Kegelschnitten (der Kegel selbst!).

Bemerkung/Definition 2.32. Man kann zeigen, dass die Automorphismen der reellen projektiven Ebene genau die Automorphismen der Form

$$\varphi \in \text{PGL}(2, \mathbb{R}) := \{\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), (x_1 : x_2 : x_3) \mapsto Ax, A \in \text{GL}(3, \mathbb{R})\}$$

sind. Einfach zu zeigen ist, dass jede solche Abbildung tatsächlich ein Automorphismus von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist; das ist analog zum Fall in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Die andere Inklusion ist nicht so leicht einzusehen, siehe dazu [KK96]. Die Klassen der reellen projektiven Kegelschnitte sind also gerade jene Mengen von Kegelschnitten, die unter projektiven Automorphismen abgeschlossen sind.

Man nennt zwei projektive algebraische Kurven f und g , deren definierende homogene Polynome durch einen projektiven Automorphismus von $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ineinander übergehen **projektiv äquivalent**, da die obigen Klassen natürlich Äquivalenzklassen sind.

2.5.3 Der Satz von Bézout und Kegelschnitte durch fünf Punkte

Eine ganz wesentliche Eigenschaft von Kegelschnitten ist jene, dass durch fünf Punkte der Ebene, die sich in sogenannter allgemeiner Lage befinden,

genau ein Kegelschnitt geht. Eine Funktion, die für fünf gegebene Punkte diesen Kegelschnitt einzeichnet, wird in vielen dynamischen Geometrie Programmen, wie z.B. C
bereit gestellt.

Um das verstehen, müssen wir zunächst einige einfache Fälle des sogenannten Satzes von Bézout beweisen, der auch unabhängig interessant und sogar einer der wesentlichsten Sätze über ebene Kurven ist. Für dessen Beweis wiederum werden wir verwenden, dass Kegelschnitte parametrisierbar sind, eine Eigenschaft, die ganz und gar nicht auf alle ebenen Kurven zutrifft.

Parametrisierung von Kegelschnitten

Definition 2.33. Eine Abbildung $\Phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow f \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), (u : v) \mapsto (a(u, v) : b(u, v) : c(u, v))$ mit a, b, c homogene Polynome vom gleichen Grad d heißt **Parametrisierung** einer ebenen algebraischen Kurve $f \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, falls $\text{Bild } \Phi = f$.

Parametrisierungen von Geraden kennen wir, zumindest aus der bekannten Welt des \mathbb{R}^2 , doch auch im Projektiven können wir sie leicht aufschreiben:

Beispiel 2.34. Eine Parametrisierung der projektiven Geraden $L: ax + \beta y + \gamma z = 0$ mit $\gamma \neq 0$ ist:

$$\Phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow L, \quad (u : v) \mapsto \left(u : v : -\frac{\alpha}{\gamma}u - \frac{\beta}{\gamma}v \right).$$

□

Nicht offensichtlich ist die Antwort auf die Frage, ob für einen Kegelschnitt auch eine Parametrisierung existiert. Sei C ein glatter projektiver Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dann hat er in gewissen Koordinaten die Gleichung $xz = y^2$ (siehe Beispiele 2.30 und 2.31). Diese Kurve hat die Parametrisierung

$$\Phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \quad (u : v) \mapsto (u^2 : uv : v^2).$$

Offenbar ist die obige Abbildung tatsächlich eine Parametrisierung von C , da erstens die Bildpunkte die Gleichung von C erfüllen: $u^2v^2 = (uv)^2$ und da zweitens jeder Punkt auch getroffen wird: Einerseits ergibt sich für Punkte in C mit $z = 1$ die Gleichung $x = y^2$, d.h. die Koordinaten $(y^2 : y : 1)$; dies sind Bildpunkte von $(u : 1)$. Andererseits ist der einzige Punkt auf C mit $z = 0$ $(1 : 0 : 0)$ und dies ist der Bildpunkt von $(1 : 0)$.

Ist nun D ein anderer glatter nichtleerer Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, so gibt es wegen des Klassifikationssatzes der Quadriken eine Koordinatentransformation, die D auf C abbildet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also bewiesen:

Proposition 2.35. *Jeder glatte nichtleere projektive Kegelschnitt $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hat eine Parametrisierung.*

Wie schon in der Einleitung erwähnt, sind die meisten ebenen algebraischen Kurven nicht parametrisierbar, doch dies können wir hier leider nicht beweisen.

Einfache Fälle des Satzes von Bézout

Der **Satz von Bézout** sagt, dass zwei ebene projektive algebraische Kurven in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vom Grad d bzw. e sich in genau $d \cdot e$ Punkten schneiden, wenn wir über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ (z.B. \mathbb{C}) arbeiten und wenn die Schnittpunkte mit korrekter Multiplizität gezählt werden.

Um wenigstens einige einfache Spezialfälle dieses Satzes beweisen zu können, müssen wir zunächst klären, was die Multiplizität einer Nullstelle eines homogenen Polynoms in zwei Variablen sein soll.

Sei also $\tilde{f}(u, v)$ ein homogenes Polynom vom Grad d mit Koeffizienten in einem Körper \mathbb{K} :

$$\tilde{f}(u, v) = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} v + \cdots + a_0 v^d.$$

Dies ist ein Objekt in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$; wie bei Objekten in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ betrachten wir, um es besser zu verstehen, zunächst einmal die affine Karte, die wir durch Schnitt mit der Ebene $x_{n+1} = 1$, d.h. hier $v = 1$, erhalten. Einsetzen von $v = 1$ ergibt sich das assoziierte Polynom in einer Variablen:

$$f(u) = a_d u^d + a_{d-1} u^{d-1} + \cdots + a_0.$$

Für eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{K}$ von f gilt:

$$f(\alpha) = 0 \iff (u - \alpha) \mid f(u) \iff (u - \alpha v) \mid \tilde{f}(u, v) \iff \tilde{f}(\alpha, 1) = 0,$$

d.h. Nullstellen von f in \mathbb{K} entsprechen Nullstellen von \tilde{f} in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, die nicht der Punkt $p_\infty := (1 : 0)$ (der ∞ ferne Punkt der von uns oben gewählten kanonischen Einbettung) sind.

Was soll also eine Nullstelle von \tilde{f} im Unendlichen sein? Für eine solche Nullstelle gilt (wie üblich schreiben wir im Folgenden für p teilt q kurz $p \mid q$):

$$\tilde{f}(1, 0) = 0 \iff a_d = 0 \iff \deg f < d.$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.36. *Wir definieren die **Multiplizität** (oder **Vielfachheit**) einer Nullstelle $(a : b)$ eines homogenen Polynoms \tilde{f} in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ als:*

1. die Multiplizität von f an der entsprechenden Nullstelle $\frac{a}{b} \in \mathbb{K}$, falls $b \neq 0$, oder
2. $d - \deg f$, falls $b = 0$ (also $(a : b) = (1 : 0) = p_\infty$).

Die Multiplizität einer Nullstelle von \bar{f} in einem Punkt $(a : b)$ ist also die höchste Potenz $(bu - av)$, die \bar{f} teilt und in $(1 : 0)$ ist es die höchste Potenz von v , die \bar{f} teilt. Dass die Definition der Multiplizität tatsächlich sinnvoll ist, zeigt das folgende Resultat:

Proposition 2.37. *Sei $\bar{f}(u, v)$ ein homogenes Polynom vom Grad d . Dann hat \bar{f} höchstens d Nullstellen in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ und genau d Nullstellen, wenn \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen ist und wenn wir die Nullstellen mit Multiplizitäten zählen.*

Beweis. Ist m_∞ die Multiplizität der Nullstelle p_∞ , so ist $d - m_\infty$ der Grad des inhomogenen Polynoms f . Für solche Polynome f ist das Resultat aber der bekannte Fundamentalsatz der Algebra (siehe z.B. [LS07, Satz 1.23]). \square

Beispiel 2.38. Wir betrachten das Polynom $\bar{f} = u^4v^2 - 2u^2v^4 + v^6$. Dann erhalten wir in der affinen Karte $v = 1$ das assoziierte Polynom f in einer Variablen: $f = u^4 - 2u^2 + 1 = (u^2 - 1)^2 = ((u - 1)(u + 1))^2$. Die Nullstellen von f sind $u_1 = 1, u_2 = -1$, jeweils mit Multiplizität 2; die entsprechenden Nullstellen von \bar{f} sind also $(1 : 1)$ und $(-1 : 1)$, jeweils mit Multiplizität 2. Es bleibt noch zu testen, ob der unendlich ferne Punkt $(1 : 0) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ auch eine Nullstelle von \bar{f} ist: $\deg \bar{f} - \deg f = 6 - 4 = 2$, d.h. $(1 : 0)$ ist Nullstelle mit Multiplizität 2. Insgesamt finden wir also $2 + 2 + 2 = 6$ Nullstellen, wenn wir diese mit ihren Multiplizitäten zählen. Da $\deg \bar{f} = 6$, ist dies genau das, was wir, zumindest über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wegen der Proposition, erwarten. \square

Mit der obigen Proposition können wir nun die Fälle des Satzes von Bézout beweisen, die wir für das Arbeiten mit Kegelschnitten benötigen:

Satz 2.39 (Einfache Fälle des Satzes von Bézout). *Sei $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ eine Gerade bzw. $K \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ein glatter Kegelschnitt und sei $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ eine ebene algebraische Kurve, die durch eine homogene Gleichung $C_d(x, y, z) = 0$ vom Grad d gegeben ist.*

Ist $L \not\subset C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ bzw. $K \not\subset C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, so gilt:

$$\#\{L \cap C\} \leq d \text{ bzw. } \#\{K \cap C\} \leq 2d.$$

Beweis. Die Gerade $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sei parametrisiert durch

$$L: (a(u, v) : b(u, v) : c(u, v)),$$

wobei a, b, c lineare homogene Polynome in u, v sind.

Wie in Proposition 2.35 gezeigt, können wir auch den Kegelschnitt K mit gewissen quadratischen homogenen Polynomen $a(u, v), b(u, v), c(u, v)$ parametrisieren.

Den Schnitt von L bzw. K mit der Kurve C vom Grad d können wir nun finden, indem wir die Parametrisierungen in c einsetzen und null setzen:

$$\bar{f}(u, v) := C_d(a(u, v), b(u, v), c(u, v)) = 0.$$

\bar{f} ist nun ein homogenes Polynom vom Grad d bzw. $2d$; die Behauptung folgt also aus der Proposition 2.37 über die Anzahl der Nullstellen eines homogenen Polynoms in zwei Variablen. \square

Kegelschnitte durch fünf Punkte

Der Satz von Bézout besagt für zwei glatte Kegelschnitte $C, D \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dass sie sich in höchstens 4 Punkten schneiden, wenn nicht einer eine Teilmenge des anderen ist.

Dies können wir benutzen, um zu beweisen, dass durch fünf Punkte in allgemeiner Lage höchstens ein Kegelschnitt geht:

Proposition/Definition 2.40. Sind $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ verschiedene Punkte in *allgemeiner Lage*, d.h. keine vier sind kollinear, so gibt es höchstens einen Kegelschnitt durch P_1, \dots, P_5 .

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Proposition 2.41. Sind $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ verschiedene Punkte, so gibt es einen Kegelschnitt durch P_1, \dots, P_5 .

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Die Propositionen 2.40 und 2.41 liefern:

Korollar 2.42. Durch fünf Punkte in allgemeiner Lage geht genau ein Kegelschnitt.

Da der Beweis von 2.41 konstruktiv ist, ist nun klar, wie dynamische Geometrie Programme die Funktion anbieten können, einen Kegelschnitt durch 5 Punkte zu legen.

Mehrfache Schnittpunkte von Kegelschnitten

Über mehrfache Schnittpunkte von Kegelschnitten haben wir nur in der Übung in Form von Präsenzaufgaben gesprochen. Da dies aber zum allgemeinen Verständnis von Vielfachheit und dem Satz von Bézout stark beiträgt, geben wir hier die wesentlichen Punkte knapp wieder.

...

Krümmung

3-/4-fache Schnittpunkte zweier glatter Kegelschnitte

Symmetrie

...

to do

2.6 Das Doppelverhältnis und der Satz von Pascal

Diese Vorlesung musste leider ausfallen. Ihre Inhalte sind zwar nicht unmittelbar für das weitere Verständnis der Veranstaltung wichtig, da wir meist nur Basiswissen über die projektive Ebene benötigen. Für ein tieferes Verständnis der projektiven Ebene sind das Doppelverhältnis, der Satz von Pascal und Dualität aber essentiell. Daher präsentieren wir diesen Stoff hier, obwohl er in der Veranstaltung nicht zur Sprache kam. In einer Neuauflage der Vorlesung sollte dieser Abschnitt, wenn zeitlich möglich, eingebaut werden.

7. Vorl. — 05. Dez. '07
Ausgefallen: Doppelverhältnis, Satz v. Pascal, Dualität

2.6.1 Projektive Transformationen

...

$$\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \text{PGL}(2, \mathbb{R}).$$

to do

2.6.2 Das Doppelverhältnis

...

to do

Definition 2.43. *Doppelverhältnis*

Satz 2.44. *Formel für Doppelverhältnis*

Satz 2.45. *Doppelverhältnis auf einem Kegelschnitt*

harmonische Punkte

2.6.3 Der Satz von Pascal

...

to do

Satz 2.46 (von Pascal²).

Beweis. mit Doppelverhältnis auf Kegelschnitten

□

2.7 Projektive Dualität

Das aus der linearen Algebra bekannte Konzept des dualen Raumes können wir mit Hilfe unserer Konstruktion der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ auf projektive Ebenen anwenden; und hier ist es sogar besonders schön, nahezu perfekt, wie wir sehen werden.

²... Pascal...

2.7.1 Die duale projektive Ebene

Sei U ein Untervektorraum in einem Vektorraum V der Dimension n . Notieren wir V^* den (ebenfalls n -dimensionalen) Dualraum, so ist

$$U' = \{\varphi \in V^* \mid \varphi_U = 0\}$$

die Menge aller Linearformen, die auf ganz U verschwinden, d.h.,

$$U' = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \in V^* \mid a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0 \quad \forall u \in U\}.$$

Aus der linearen Algebra bekannt ist, dass U' ein Untervektorraum des n -dimensionalen Vektorraumes V^* ist (nachrechnen!), dass außerdem

$$\dim U' = \dim V - \dim U$$

und dass für zwei Untervektorräume $U_1, U_2 \subset V$ gilt:

$$U_1 \subset U_2 \iff U'_1 \supset U'_2.$$

Wir interessieren uns hier aber nur für projektive Ebenen, d.h. für den Fall $\dim V = 3$. Dann können wir wie in der Proposition/Definition 2.6 die projektive Ebene $\mathbb{P}(V^*)$ betrachten.

Machen wir dies noch etwas expliziter:

Beispiel 2.47. Für $V = \mathbb{R}^3$ ist $V^* = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. Dies ist offenbar ein 3-dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$. Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ der 1-dimensionale Untervektorraum

$$U = \langle(1, 2, 3)\rangle = \{\lambda(1, 2, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

dann ist

$$\begin{aligned} U' &= \{a_1x_1 + \dots + a_3x_3 \in V^* \mid a_1u_1 + \dots + a_3u_3 = 0 \quad \forall u \in U\} \\ &= \{a_1x_1 + \dots + a_3x_3 \in V^* \mid \lambda a_1 + 2\lambda a_2 + 3\lambda a_3 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_1x_1 + \dots + a_3x_3 \in V^* \mid a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0\} \\ &= \{(-2a_2 + 3a_3)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in V^* \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar ein 2-dimensionaler Vektorraum. Ist umgekehrt U ein 2-dimensionaler Untervektorraum, so ist U' 1-dimensional.

Wie können wir uns nun das Verhältnis von U und U' veranschaulichen? Die Menge U ist, wenn wir sie in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ auffassen, ein Punkt. Die Elemente von V^* sind Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und U' ist also eine Menge von Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, nämlich eine Ursprungsebene in \mathbb{R}^3 . Alle Geraden von U' gehen durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Punkt $\langle(1, 2, 3)\rangle$, da für ein

$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in U'$ gilt: $\varphi|_{x=(1,2,3)} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$. U' ist also das Bündel aller Geraden durch den Punkt $(1 : 2 : 3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Sind nun $p = (p_1 : p_2 : p_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $q = (q_1 : q_2 : q_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zwei Punkte, so geht durch sie die eindeutige Gerade g mit der Gleichung

$$g: \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ist offensichtlich, da die Determinante erstens eine Ursprungsebene im \mathbb{R}^3 definiert und da zweitens das Einsetzen von p bzw. q in die Matrix jeweils zwei identische Spalten liefert, so dass deren Determinante verschwindet.

Mit obiger Notation ist g' nun ein 1-dimensionaler Untervektorraum von V^* , analog zur Rechnung oben. Außerdem gilt, wie man auf ähnliche Weise leicht nachrechnen kann: $p, q \subset g$ und $p', q' \supset g'$, wie oben bereits allgemeiner für $U_1, U_2 \subset V$ gesagt. \square

Wir können die duale Ebene aber nicht nur über den dualen Vektorraum erklären, sondern auch einfach ad hoc eine Definition aus dem Hut zaubern, wie in der folgenden Proposition. Die vorigen Erläuterungen haben hoffentlich klar gemacht, dass diese Definition der dualen projektiven Ebene eben nicht nur ad hoc ist:

Proposition 2.48. *Sei π eine projektive Ebene. Sei π^* die Menge der Geraden in π ; die Geraden in π^* sind die Geradenbündel in π . Dann ist π^* eine projektive Ebene, die zu π **duale projektive Ebene**.*

Beweis. Wie oben erläutert, ist dies natürlich schon aus abstrakten Gründen für die uns hauptsächlich interessierenden Ebenen $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ richtig. Wir werden hier aber zum besseren Verständnis den allgemeinen Beweis auf Basis der Axiome führen und also P1–P4 für π^* herleiten (wie in [KK96, Prop. 3.7]):

P1 Wir müssen zeigen: $P \neq Q \in \pi^* \Rightarrow \exists!$ Gerade von π^* , die P und Q enthält. Übersetzt in Aussagen über π heißt dies:

D1 $p \neq q \in \pi \Rightarrow \exists!$ Geradenbündel durch einen Punkt von π , das p und q enthält.

Dies bedeutet aber nur, dass p und q einen eindeutigen Punkt gemeinsam haben, also: $D1 \iff D2$.

P2 Sind L und M zwei Geraden in π^* , so haben sie genau einen Punkt gemeinsam. Übersetzt heißt dies für π :

D2 Zwei Geradenbündel haben genau eine Gerade gemeinsam.

Offenbar gilt: $D2 \iff P1$.

P3 Es gibt drei nicht kollineare Punkte in π^* . Für π heißt dies übersetzt:

D3 In π gibt es drei nicht kopunktale Geraden.

Hierbei heißt **kopunktal**, dass sich alle Geraden in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Wir haben schon häufiger gesehen, dass die Geraden PQ , PR , QR sich nicht in einem Punkt schneiden, wenn P, Q, R nicht kollinear sind. Auch die Umkehrung gilt offenbar.

P4 Jede Gerade in π^* hat wenigstens drei Punkte. Für π heißt dies:

D4 Jedes Geradenbüschel in π hat wenigstens drei Geraden.

Sei P das Zentrum eines Geradenbüschels und sei $l \not\cong P$ eine Gerade. Wegen P4 hat l wenigstens drei Punkte A, B, C . Dann sind die Geraden PA , PB , PC aber drei verschiedene Geraden durch P . Umgekehrt folgt auch P4 leicht aus D4.

□

Bemerkung/Definition 2.49 (Desarguesche Ebenen). *Wir haben in der Übungsaufgabe 15 gesehen, dass es auch projektive Ebenen gibt, in denen der Satz von Desargues nicht gilt. Eine projektive Ebene, in dieser Satz gilt, heißt daher **desarguesche projektive Ebene**. Man kann dann beispielsweise zeigen, dass π genau dann desarguesch ist, wenn π^* es ist (siehe [KK96, Kap. 3]).*

2.7.2 Das Prinzip der Dualität

Die obigen Erklärungen können wir ausnutzen, um uns die Arbeit des Beweisens zu halbieren.

Sei nämlich A eine Aussage über projektive Ebenen, die man mit Hilfe von P1–P4 beweisen kann. Dann ist die duale Aussage D , die man aus A erhält, indem man folgende Vertauschungen vornimmt, ebenfalls wahr:

Punkte \leftrightarrow Gerade
 liegt auf \leftrightarrow geht durch
 kollinear \leftrightarrow kopunktal
 Schnitt \leftrightarrow Verbindungsgerade
 ...

Beweis (Metabeweis). A ist wahr für alle projektive Ebenen, also ist es auch wahr für die dualen projektiven Ebenen. Ist A aber wahr für eine duale Ebene π^* , dann ist D wahr für π . Da π aber frei wählbar ist, ist D für alle projektiven Ebenen wahr. □

Bemerkung 2.50. 1. *Noch besser ist diese Dualität ersichtlich, wenn man den Begriff der Inzidenz verwendet, da dann in der Formulierung nicht zwischen liegt auf und geht durch unterschieden werden muss.*

2. *Das Prinzip der Dualität kann auf desarguesche Ebenen ausgedehnt werden.*

Beispiel 2.51. Wenden wir die Dualität auf ein Dreieck PQR und drei Geraden a, b, c durch die Eckpunkte an, die sich in einem Punkt schneiden (s. Abb. 2.21, links), so ergeben sich drei kollineare Punkte A, B, C auf den drei Seiten p, q, r eines Dreiecks (s. Abb. 2.21, rechts). \square

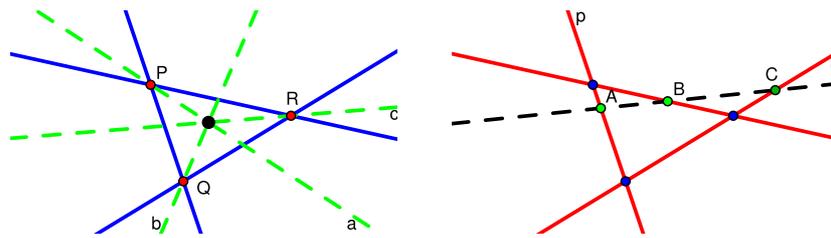


Abbildung 2.21. Ein Beispiel für Dualität am Dreieck.

2.7.3 Anwendungen der Dualität

Viele Resultate lassen sich mit Hilfe der Dualität sehr einfach herleiten; einige wichtige werden wir im Laufe der Vorlesung noch kennen lernen. Ein erstes Beispiel ist folgendes (den ersten Teil haben wir bereits für endliche projektive Ebenen der Form $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ gesehen):

- Proposition 2.52.**
1. Eine projektive Ebene π , die eine Gerade l enthält, die genau aus $n + 1$ Punkten besteht, hat insgesamt $n^2 + n + 1$ Punkte.
 2. Eine projektive Ebene π , die ein Geradenbüschel mit einem Zentrum P enthält, das genau aus $n + 1$ Geraden besteht, hat insgesamt $n^2 + n + 1$ Geraden.

Beweis. 1. Der Beweis ist analog zum affinen Fall (Übungsaufgabe 4); trotzdem sei er hier kurz ausgeführt: Es gibt einen Punkt $P \notin l$. Jeder Punkt Q liefert einen Schnittpunkt $PQ \cap l$. Dies etabliert eine Bijektion zwischen den Punkten von l und den Geraden im Geradenbüschel mit Zentrum P . Sei $g \neq PQ$ eine der anderen Geraden des Büschels. Dann liefern die Geraden durch Q und jeweils einen Punkt von l genau $n + 1$ Schnittpunkte mit g . Einen weiteren Punkt R kann es auf g nicht geben, da sonst QR einen weiteren Punkt auf l liefert. Ebenso hat jede weitere Gerade des Büschels außer P noch n Punkte. Insgesamt gibt es also $n + 1 + n \cdot n = n^2 + n + 1$ Punkte in der projektiven Ebene.

2. Dualisieren der ersten Aussage liefert die zweite.

\square

Ein weiteres schönes Beispiel ist der Beweis der Rückrichtung im Satz 2.13 von Desargues:

Beweis (Rückrichtung im Satz 2.13 von Desargues). Zu zeigen ist also, dass aus AA', BB', CC' schneiden sich in einem Punkt O schon folgt, dass S_A, S_B, S_C auf einer Geraden liegen. Dazu müssen wir nur zeigen, dass die duale Aussage der Hinrichtung gerade die Aussage der Rückrichtung ist. Es handelt sich also nur um eine Übersetzungsaufgabe. Für Details siehe [Aud03, S. 154f] \square

to do

...

Satz 2.53 (von Brianchon³). . . .

Beweis. Dualisieren des Satzes von Pascal 2.46. \square

³ . . . Brianchon . . .

Dynamische Geometrie

8. Vorl. — 12. Dez. '07
Dynamische Geometrie

Dieser Abschnitt ist einer der zentralen der ganzen Vorlesung. Wir erklären hier, was statische und dynamische Geometrie, was deterministische und kontinuierliche Dynamische Geometrie Systeme unterscheidet und wie Kontinuität, zumindest prinzipiell, verwirklicht werden kann.

Wir folgen im Wesentlichen U. Kortenkamps Dissertation [Kor99]. Unsere Darstellung muss dabei leider etwas vage bleiben, da wir nicht die nötigen Voraussetzungen aus der Informatik bereitgestellt haben. Für das qualitative Verständnis der Phänomene ist dies aber auch nicht unbedingt nötig.

3.0.4 Kontinuität versus Determinismus

Im gesamten Abschnitt gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass die einzigen Eingabe-Daten in ein Dynamisches Geometrie System die Koordinaten von Punkten und die Information über Geraden durch Punkte bzw. Kreise mit Mittelpunkten und Aufpunkten sind. Prinzipiell ändert sich durch die Hinzunahme weiterer Eingabedaten, wie beispielsweise Geraden, die durch Aufpunkt und Steigung gegeben werden, nichts. Ausgabe-Daten sind aus Eingabe-Daten durch iteriertes Schneiden konstruierte Punkte, Geraden, Kreise.

Beispiel 3.1. 1. Winkel-Halbierung in allen Programmen: stetiges Verhalten.

2. Winkel-Viertelung in E D G und G G : unstetiges Verhalten, plötzlicher Sprung. In C oder, mit Kontinuität eingeschaltet, auch in G G und D G : stetiges Verhalten.

3. Schnittpunkt zweier Kreise von gleichem Radius springt nach unten, wenn sich der Mittelpunkt des einen durch den Mittelpunkt des anderen läuft: wie Winkel-Viertelung.

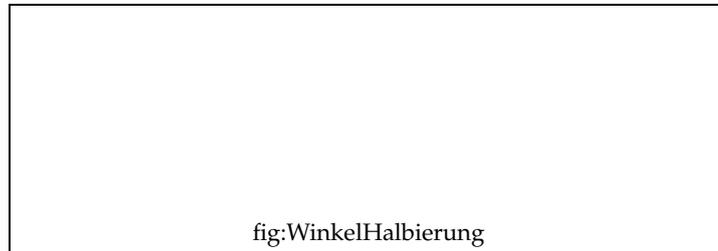


Abbildung 3.1. SKIZZE fig:WinkelHalbierung FEHLT!



Abbildung 3.2. SKIZZE fig:WinkelViertelung FEHLT!

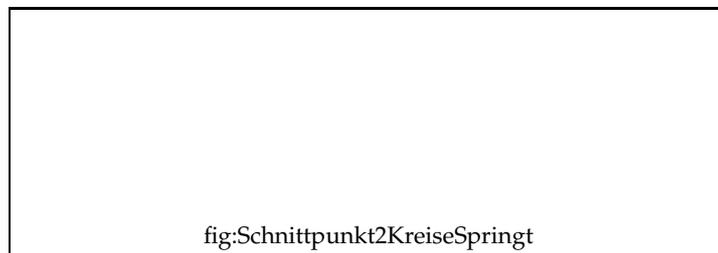


Abbildung 3.3. SKIZZE fig:Schnittpunkt2KreiseSpringt FEHLT!

Aber Achtung: Außer C verwendet kein Programm einen Algorithmus, der Kontinuität zumindest prinzipiell garantiert; die anderen Programme arbeiten entweder immer (nahezu) deterministisch oder verwenden eine Heuristik, die manchmal kontinuierliches Verhalten ermöglicht, manchmal nicht. □

Definition 3.2. 1. Ein Dynamisches Geometrie System heißt *deterministisch*, wenn es für eine feste Menge von Eingabepositionen der Punkte immer die gleichen Ausgabepositionen liefert.

2. Ein Dynamisches Geometrie System heißt **kontinuierlich**, wenn es das sogenannte **Kontinuitätsprinzip** verwirklicht: Kleine Änderungen in den Eingabepositionen der Punkte führen zu kleinen Änderungen in den Ausgabepositionen.

Wie man anhand der obigen Beispiele nachprüfen kann, ist E D eher ein deterministisches und C eher ein kontinuierliches Dynamisches Geometrie System. Manche dynamischen Geometrie Systeme, wie G G , bilden gewollt eine Mischform, um einige (aber nicht alle) unerwünschten Phänomene zu beseitigen; viele Systeme bilden allerdings ungewollt eine Mischform, da sie entweder den Determinismus oder aber die Kontinuität nicht perfekt umsetzen. Das prinzipielle Problem hierbei ist der folgende Satz:

Satz 3.3. *Determinismus und Kontinuität sind nicht gleichzeitig für ein Dynamisches Geometrie System möglich.*

Beweis. Wir betrachten die Winkel-Viertelung in einem kontinuierlichen System; in Abb. 3.4 ist dies der Winkel zwischen der schwarzen gestrichelten und der schwarzen durchgezogenen Geraden.

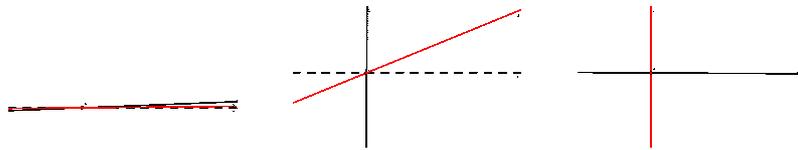


Abbildung 3.4. Winkel-Viertelung.

Am Anfang vierteln wir den Winkel 0° , d.h. die (rote) Gerade, die den geviertelten Winkel beschreibt, ist auch die horizontale Gerade (linkes Bild). Wir betrachten dann die Situation (mittleres Bild) nach einer viertel Umdrehung der schwarzen Geraden, so dass sich die rote Gerade also insgesamt um $\frac{1}{4} \cdot 90^\circ$ gedreht hat.

Schließlich betrachten wir die Situation nach einer kompletten Umdrehung. In einem kontinuierlichen System hat sich der geviertelte Winkel um 90° gedreht; in einem deterministischen System muss, da die Eingabedaten die gleichen wie am Anfang sind, die den geviertelten Winkel beschreibende Gerade wieder die horizontale Gerade sein. Dies sind zwei verschiedene Situationen, die nicht gleichzeitig auftreten können.

□

Versuche des Ausbesserns einiger dieser Probleme durch Hinzufügen zusätzlicher Daten, wie z.B. die Richtung von Geraden, hilft nur in einigen Fällen. Im Allgemeinen gilt nämlich das Folgende:

Satz 3.4. *Endliche viele Bits an zusätzlichen Daten reichen nicht, um ein deterministisches Dynamisches Geometrie System kontinuierlich zu machen.*

Beweis. Iteriertes Winkel-Halbieren liefert Winkel- 2^n -teilung. Um dies in einem deterministischen System zu verwirklichen, benötigt man mindestens n zusätzliche Bits. \square

3.0.5 Kontinuität in einem Dynamischen Geometrie System

Tracing

Am Beispiel der Winkel-Viertelung kann man verstehen, wie man einen ersten Ansatz für ein kontinuierliches Dynamisches Geometrie System verwirklichen kann: Man merkt sich jeweils die aktuelle Position der Eingabedaten und für die mehrdeutigen Punkte merkt man sich außerdem deren aktuelle Position. Wird dann die Maus verschoben, wählt man die nächste mehrdeutige Position so, dass das Verhalten des Systems stetig ist.

Wir werden im Folgenden sehen, dass sich das im Prinzip zwar leicht anhört, dass man aber im Detail einige Probleme zu lösen hat.

Complex Tracing

Das Tracing, das wir im vorigen Abschnitt beschrieben haben, kann man natürlich genauso auch im Komplexen durchführen, da hier auch ein Abstands begriff existiert. Bevor wir diese Methode, die von \mathbb{C} eingesetzt wird, erläutern, geben wir, auch, um unsere verwendeten Notationen einzuführen, einen kurzen Überblick über komplexe Zahlen.

Einschub: Komplexe Zahlen

Offenbar hat ein Polynom vom Grad d in einer Variablen x höchstens d Nullstellen, da aus $p(x_0) = 0$ folgt $x - x_0 \mid p$ und daher ist $\frac{p}{x-x_0}$ ein Polynom vom Grad $d - 1$.

Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad 1 besitzt, wie jedes reelle Polynom vom ungeraden Grad, auch eine reelle Nullstelle, wegen des Zwischenwertsatzes. Doch es gibt Polynome vom Grad 2, die keine reelle Nullstelle besitzen, wie z.B. $f(x) = x^2 + 1$. Ist i eine Nullstelle von diesem f , so definiert man mit

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

die **komplexen Zahlen**; dies ist ein Körper, i heißt **imaginäre Einheit**. \mathbb{C} ist offenbar ein 2-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum (Abb. 3.5, links). Daher kann

man insbesondere den Abstand zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ leicht mit dem Satz von Pythagoras berechnen:

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

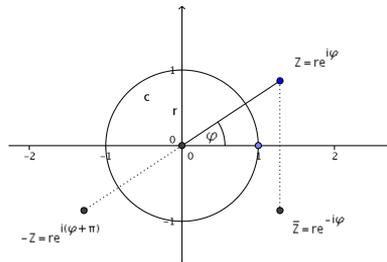


Abbildung 3.5. Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten.

Häufig ist es aber vorteilhaft, anstatt der Vektor der beiden kartesischen Koordinaten a, b für eine komplexe Zahl **Polarkoordinaten** zu verwenden: $z = re^{i\varphi}$ (Abb. 3.5, rechts). Jede der beiden Notationen hat ihre Vorteile. Insbesondere für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist die letztere hilfreich:

$$r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Umgekehrt kann man dies natürlich benutzen, um recht leicht die beiden Wurzeln aus einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ zu ziehen, d.h. die beiden Zahlen z_1, z_2 , für die gilt: $(z_1)^2 = z$, $(z_2)^2 = z$.

Um das Tracing im Komplexen auch visuell erläutern zu können, führen wir für einen Punkt $Z = (Z_1, Z_2) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2$ in der komplexen Ebene folgende Notation ein, die im \mathbb{R}^2 zu veranschaulichen ist (s. Abb. 3.6): Wir stellen Z dar im \mathbb{R}^2 als Punkt mit den Koordinaten (a_1, a_2) , an den horizontal bzw. vertikal Vektoren der Länge b_1 bzw. b_2 eingezeichnet werden, deren Richtung (links/rechts bzw. oben/unten) das Vorzeichen $+, -$ von b_1 bzw. b_2 ausdrückt.

Tracing im Komplexen

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, können wir natürlich Abstände zwischen Punkten berechnen und daher ein Tracing durchführen.

Beispiel 3.5. 1. Einheitskreis mit $x = \lambda$ schneiden für $\lambda > 1$.

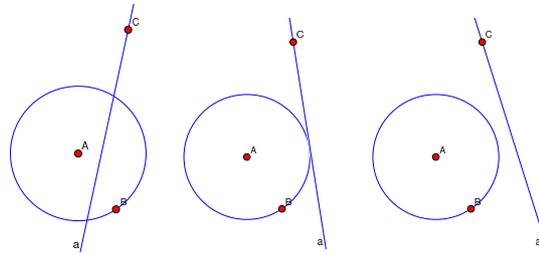


Abbildung 3.7. Kreis und Gerade.

Beispiel 3.7. Wir betrachten zwei gleich große Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 . Eine Parallele zur Gerade M_1M_2 durch die Mittelpunkte schneide die Kreise in A_1 bzw. A_2 (Abb. 3.8). Damit die Konstruktion global konsistent bleibt, möchte man, dass die Abstände $|A_1A_2|$ und $|M_1M_2|$ gleich bleiben für alle Instanzen der Konstruktion. Insbesondere sollen die Abstände gleich bleiben, wenn die Parallele nach oben gezogen wird, bis sie die Kreise nicht mehr schneidet, und dann wieder nach unten gezogen wird, wie in der Abbildung. Dazu muss das dynamische Geometrie Programm sicher stellen, dass bei beiden Kreisen jeweils der linke bzw. rechte Schnittpunkt passend gewählt wird. \square

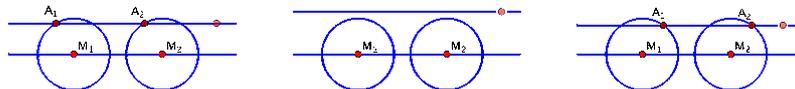


Abbildung 3.8. Lokale und globale Konsistenz.

Hebbare Singularitäten

Wie in der Funktionentheorie gibt es in der dynamischen Geometrie hebbare Singularitäten, d.h. Singularitäten, die zwar existieren, die man aber auf offensichtliche Weise beheben kann. Im Folgenden dazu ein Beispiel; trotzdem bleiben immer noch die meisten Situation, die man nicht so einfach klären kann.

Beispiel 3.8. Funktionen mit Unstetigkeitsstellen: Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$. Diese hat eine hebbare Singularität für $x = a$, denn f ist hier nicht definiert, man kann f aber problemlos auf ganz \mathbb{R} in stetiger Weise fortsetzen, da die Grenzwerte für $x \rightarrow a$ von links und rechts übereinstimmen.

Dynamische Geometrie: Nehmen wir noch einmal das Beispiel der zwei gleich großen Kreise (Abb. 3.9). Zwar schneiden sich die beiden Kreise im mittleren Bild nicht in einem Punkt (sondern im ganzen Kreis, da sie ja identisch sind), doch kann man, wenn man nur einen Punkt als Lösung haben möchte, diese Lösung durch Grenzwertbildung einfach finden.

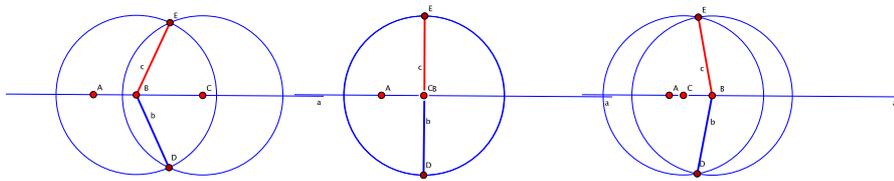


Abbildung 3.9. Schnittpunkte zweier gleich großer Kreise.

□

Kontinuität beim Auftreten von Singularitäten

Dieser Abschnitt enthält die wichtigste Idee, die das Kontinuitätsprinzip in dynamischen Geometrie Systemen ermöglicht.

Eingaben sind diskret

Zunächst bemerken wir, dass die Eingaben in einem dynamischen Geometrie System gar nicht kontinuierlich erfolgen, sondern aus einzelnen Maus-Koordinaten bestehen, die jeweils einen kleinen (oder großen) Abstand voneinander haben! Selbst, wenn die Maus nacheinander auf zwei benachbarten Bildschirmpixeln ist, haben die daraus resultierenden Mauskoordinaten einen gewissen Abstand, nämlich gerade die Breite eines Pixels.



Abbildung 3.10. Die Eingaben in ein dynamisches Geometrie Programm sind diskret.

Kontinuität können wir beispielsweise erreichen, indem wir die Punkte durch Strecken verbinden und so einen Streckenzug erhalten.

Die wesentliche Idee

Wie wirkt sich die Tatsache, dass wir nur in diskreten Punkten Maus-Koordinaten erhalten, auf das folgende Beispiel des Schnitts eines Kreises mit einer wandernden vertikalen Geraden aus?

Beispiel 3.9. Wir betrachten die Schnittpunkte des Einheitskreises $k: x^2 + y^2 = 1$ mit der vertikalen Geraden $l: x = \lambda$. Die Startposition, also die erste Mausposition, liefere $\lambda = 0$, die Endposition, also die nächste Mausposition, $\lambda = 2$. \square

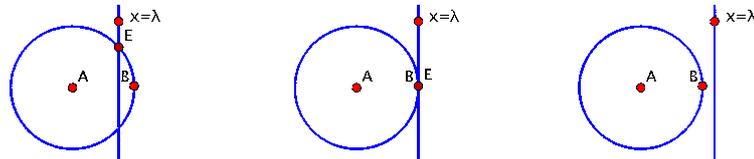


Abbildung 3.11. Kreis $x^2 + y^2 = 1$ mit der vertikalen Geraden $x = \lambda$.

Zunächst haben wir, wenn wir eine Position für $\lambda = 0$ mit $\lambda = 2$ durch eine Strecke verbinden, das Problem, dass wir wieder durch eine Singularität laufen im Punkt $(1, 0)$ für $\lambda = 1$.

Doch wer zwingt uns, diesen kürzesten, direkten Verbindungsweg

$$\lambda_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 2t.$$

zwischen den beiden Instanzen der Konstruktion zu wählen? Statt dessen können wir einfach einen Umweg gehen, der die Singularität vermeidet und für den auch $\lambda_0(0) = 0, \lambda_0(1) = 2$ gilt!

Wir berechnen dazu zunächst, für welche λ überhaupt eine Singularität auftritt, d.h. für welche λ beide Schnittpunkte des Kreises k und der Geraden l übereinander fallen. Es gilt:

$$x^2 + y^2 = 1, x = \lambda \iff y^2 = 1 - \lambda^2, x = \lambda \iff (x, y) = (\lambda, \pm \sqrt{1 - \lambda^2}).$$

y hat also genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $1 - \lambda^2 = 0$, d.h. wenn $\lambda^2 = 1$ bzw. $\lambda = \pm 1$. Die einzigen beiden Fälle, bei denen eine Singularität auftritt, sind also jene der Geraden $x = -1$ und $x = 1$. Insbesondere gibt es auch keine komplexen λ , für die eine doppelte Nullstelle auftritt!

Ein Umweg, der die Singularität bei $x = 1$ vermeidet, ist daher:

$$\lambda_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 1 - e^{-i\pi t}.$$

Es gilt: $\lambda_1(0) = 1 - 1 = 0 = \lambda_0(0)$, $\lambda_1(1) = 2 = \lambda_0(1)$. Erweitern wir λ_1 auf das Intervall $[0, 2]$, so gilt insgesamt: $\lambda_1(2) = 1 - 1 = 0 = \lambda_1(0)$, $\lambda_1(\frac{1}{2}) = 1 - (-i) = 1 + i$, $\lambda_1(\frac{3}{2}) = 1 - i$. Der Weg $\lambda_1: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ läuft also einmal im Uhrzeigersinn um die Singularität bei $\lambda = 1$ herum.

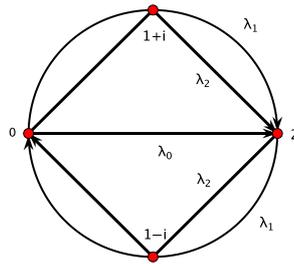


Abbildung 3.12. Umwege um die Singularität bei $\lambda = 1$.

Ein anderer möglicher Pfad für λ , der einmal im Uhrzeigersinn um die Singularität bei $\lambda = 1$ herum läuft, ist der stückweise lineare Pfad $\lambda_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda_2(t)$ mit $\lambda_2(0) = 0$, $\lambda_2(\frac{1}{2}) = 1 + i$, $\lambda_2(1) = 2$, $\lambda_2(\frac{3}{2}) = 1 - i$.

Es ist leicht, für einen der beiden Wege, entweder λ_1 oder λ_2 , eine Wertetabelle aufzustellen, für verschiedene Werte von t . Die Tabelle 3.1 verwendet den stückweise linearen Weg λ_2 für t im Abstand von $\frac{1}{6}$. Man kann dabei klar erkennen, dass P und Q den Platz tauschen auf dem Weg von $\lambda = 0$ über $\lambda = 2$ zurück nach $\lambda = 0$. Ist ε (hier $\varepsilon = \frac{1}{6}$) nämlich die Schrittweite für t , so heißt jener der beiden Schnittpunkte zum Zeitpunkt $t + \varepsilon$ $P(t + \varepsilon)$, der den kleineren Abstand zum Punkt $P(t)$ hat.

Dabei stellt man fest, dass man, wenn man diesen Pfad kontinuierlich durchläuft, am Ende mit $\lambda_2(2) = 0$ wieder am Ausgangspunkt angekommen ist, dass aber die beiden Schnittpunkte den Platz getauscht haben! Gleiches gilt, wenn man λ_1 verwendet. Verwendet man die Notation für komplexe Punkte $Z \in \mathbb{C}^2$ in der reellen Ebene, die in der Abb. 3.6 eingeführt wurde, so lässt sich diese Vertauschung gut veranschaulichen, siehe Abb. 3.13.

Diesen Effekt nennt man **Monodromie**. Leider können wir dieses Thema nicht vertiefen; hierfür wäre eine eigene Vorlesung in Singularitätentheorie nötig.

Kontinuität und Intuition

Kontinuität ist in einigen Fällen nicht intuitiv sinnvoll.

t	λ	$(P_1(t), P_2(t))$	$(Q_1(t), Q_2(t))$
0	0	(0, -1)	(0, 1)
0.17	(0.33+i · 0.33)	((0.33+i · 0.33), (-1.01+i · 0.11))	((0.33+i · 0.33), (1.01-i · 0.11))
0.33	(0.67+i · 0.67)	((0.67+i · 0.67), (-1.08+i · 0.41))	((0.67+i · 0.67), (1.08-i · 0.41))
0.5	(1+i · 1)	((1+i · 1), (-1.27+i · 0.79))	((1+i · 1), (1.27-i · 0.79))
0.67	(1.33+i · 0.67)	((1.33+i · 0.67), (-0.86+i · 1.03))	((1.33+i · 0.67), (0.86-i · 1.03))
0.83	(1.67+i · 0.33)	((1.67+i · 0.33), (-0.41+i · 1.35))	((1.67+i · 0.33), (0.41-i · 1.35))
1	2	(2, (i · 1.73))	(2, (-i · 1.73))
1.17	(1.67-i · 0.33)	((1.67-i · 0.33), (0.41+i · 1.35))	((1.67-i · 0.33), (-0.41-i · 1.35))
1.33	(1.33-i · 0.67)	((1.33-i · 0.67), (0.86+i · 1.03))	((1.33-i · 0.67), (-0.86-i · 1.03))
1.5	(1-i · 1)	((1-i · 1), (1.27+i · 0.79))	((1-i · 1), (-1.27-i · 0.79))
1.67	(0.67-i · 0.67)	((0.67-i · 0.67), (1.08+i · 0.41))	((0.67-i · 0.67), (-1.08-i · 0.41))
1.83	(0.33-i · 0.33)	((0.33-i · 0.33), (1.01+i · 0.11))	((0.33-i · 0.33), (-1.01-i · 0.11))
2	0	(0, 1)	(0, -1)

Tabelle 3.1. Eine Tabelle der gerundeten Koordinaten der beiden Schnittpunkte P und Q der Geraden $x = \lambda$ mit dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Man kann klar erkennen, dass P und Q den Platz tauschen auf dem Weg von $\lambda = 0$ über $\lambda = 2$ zurück nach $\lambda = 0$. Ist ε nämlich die Schrittweite für t , so heißt jener der beiden Schnittpunkte zum Zeitpunkt $t + \varepsilon$ $P(t + \varepsilon)$, der den kleineren Abstand zum Punkt $P(t)$ hat.

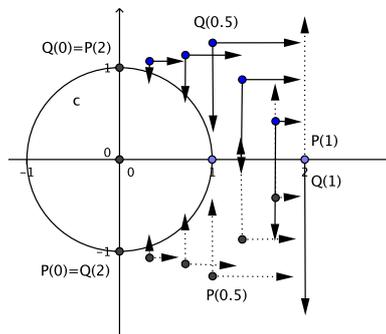


Abbildung 3.13. Vertauschung durch den Monodromie-Effekt: Der Übersichtlichkeit halber zeigt die Abbildung nur die Punkte $Q_1(0), \dots, Q_1(1)$ und $P_1(0), \dots, P_1(0)$, die ja jeweils die gleiche x -Koordinaten besitzen. Die Pfeile deuten dabei die imaginären Anteile der beiden komplexen Koordinaten der Punkte an, wie in Abb. 3.6 erläutert.

Beispiel 3.10. Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck ABC in C . Wenn B durch A wandert, wandert der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von innen nach außen und wieder zurück wegen der Kontinuität. Da man intuitiv den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreiecksinneren erwartet, ist man vielleicht bei diesem Verhalten etwas verwundert. \square

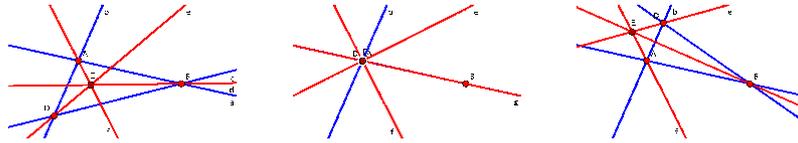


Abbildung 3.14. Schnitt der Winkelhalbierenden im Dreieck.

Beispiel 3.11. Natürlich ist auch in vielen Fällen das Wandern des Schnittpunkts eines Kreises mit einer Geraden bzw. zweier Kreise von oben nach unten nicht intuitiv. \square

3.0.6 Fazit

Weder Determinismus noch Kontinuität sind das Allheilmittel; beides gleichzeitig ist aus prinzipiellen Gründen nicht realisierbar. Kontinuität ist manchmal entgegen der Intuition, aus Determinismus resultieren häufig plötzliche, kaum vorhersehbare Sprünge.

Um ein in der Praxis gut einsetzbares System zu verwirklichen, müsste man also auf ein Mischsystem ausweichen, was aber vermutlich auch nicht oder sehr schwer zu realisieren ist. In G^c ist eine reelle Kontinuität umgesetzt, was ein Kompromiss zwischen den beiden extremen ist, die wir vorgestellt haben. Außerdem kann man in dieser Software bei Bedarf einen Schalter umlegen, so dass G^c fortan deterministisch arbeitet. In vielen Fällen ist dies, was man als Benutzer gerne hätte.

Allerdings werden wir sehen, dass C^c konsequent kontinuierlicher Ansatz durch die Benutzung der komplexen Zahlen demgegenüber einige Vorteile besitzt.

Insgesamt bleibt der Eindruck zurück, dass der Nutzer in jedem Fall über die Probleme, die bestehen, Bescheid wissen muss, um in der jeweiligen Anwendung zu entscheiden, welches System für die gewünschte Konstruktion das richtige ist. Meiner Meinung nach wird dies meistens C^c oder die kontinuierliche Variante von G^c sein, da die gelegentliche Nicht-Intuitivität häufig das geringere Übel ist oder sogar überhaupt nicht bemerkt wird. Zusätzlich ist bei einer solchen Entscheidung natürlich die Benutzung des Programmes zu berücksichtigen; hier scheint C^c gravierende Nachteile zu haben, wenn ich die Reaktionen von potentiellen Nutzern, mit denen ich bisher gesprochen habe, in Betracht ziehe. Ob die Vorteile der Kontinuität die vielleicht gewöhnungsbedürftige Benutzung von C^c aufwiegt, oder ob man doch lieber ein deterministisch ausgerichtetes System oder den Mischweg G^c vorzieht, muss jeder für sich selbst und je nach Anwendung entscheiden.

Über die Mächtigkeit Dynamischer Geometrie

Wir klären die bereits von den Griechen vor mehr als 2000 Jahren gestellte und erst im 19. Jahrhundert beantwortete Frage, welche Punkte in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Außerdem geben wir einige Beispiele von Punkten, die so nicht konstruiert werden können und daher bereits bei den Griechen einiges Kopfzerbrechen hervorriefen. Manche dieser Punkte kann man aber doch konstruieren, wenn man zusätzliche Hilfsmittel, wie z.B. einige Ortskurven, erlaubt. Viele davon kannten die Griechen bereits.

9. Vorl. — 19. Dez. '07
Über die Mächtigkeit
Dynamischer Geome-
trie

4.1 Konstruierbarkeit von Punkten mit Zirkel und Lineal

In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen der Darstellung in [Mar98], kürzen aber an einigen Stellen die Beweise ab, da sie oft recht einfach selbst zu finden sind.

Definition 4.1. Ein Punkt in \mathbb{R}^2 heißt (mit Zirkel und — unendlich langem — Lineal) **konstruierbar**, falls er der letzte einer endlichen Folge $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ von Punkten ist, so dass jeder Punkt entweder in $\{(0, 0), (1, 0)\}$ enthalten ist oder auf eine der folgenden Weisen erhalten wurde:¹

1. als Schnittpunkt zweier Geraden, die beide durch zwei Punkte gehen, die vorher in der Folge auftauchen,

¹Der klassische Zirkel, mit dem die Griechen argumentieren, ist ein wenig ungewöhnlich: er kann nur an der gleichen Stelle benutzt werden, an der er aufgespannt wurde; er klappt also quasi zusammen, sobald man ihn anhebt. Allerdings kann man recht leicht zeigen (Euklid auch schon!), dass jeder konstruierbare Punkt auch mit diesem eingeschränkten Zirkel konstruierbar ist [Mar98, Theorem 2.3]. Er stellt also nur eine praktische Einschränkung dar.

2. als Schnittpunkt einer Geraden durch zwei Punkte, die vorher in der Folge auftauchen, mit einem Kreis durch einen solchen Punkt und mit solch einem Punkt als Mittelpunkt,
3. als Schnittpunkt zweier Kreise, die jeweils durch einen Punkt gehen, der vorher in der Folge auftaucht und die beide ebenfalls einen solchen Mittelpunkt haben.

Eine **konstruierbare Gerade** ist eine Gerade, die durch zwei konstruierbare Punkte geht. Entsprechend ist ein **konstruierbarer Kreis** ein Kreis durch einen konstruierbaren Punkt mit einem konstruierbaren Punkt als Mittelpunkt.

Wir sagen, dass $x \in \mathbb{R}$ eine **konstruierbare Zahl** ist, falls der Punkt $(x, 0)$ konstruierbar ist.

Bemerkung 4.2. Es ist klar, dass die Einschränkung, dass der konstruierbare Punkt der letzte einer endlichen Sequenz sein muss, keine Einschränkung ist. Es gilt also, dass jeder Schnittpunkt zweier konstruierbarer Geraden, zweier konstruierbarer Kreise oder einer konstruierbarer Geraden mit einem konstruierbaren Kreis wieder konstruierbar ist (für mehr Details siehe [Mar98, Theorem 2.2]).

Ein erster Schritt zur Beschreibung aller konstruierbarer Punkte ist das folgende Resultat:

Lemma 4.3. Die Koordinaten-Achsen sind konstruierbare Geraden. Alle Punkte $(p, 0)$, $(-p, 0)$, $(0, p)$, $(0, -p)$ sind konstruierbar, falls nur einer davon konstruierbar ist. Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist konstruierbar genau dann, wenn $-x$ konstruierbar ist. Alle ganzen Zahlen sind konstruierbar. Der Punkt (p, q) ist konstruierbar genau dann, wenn p und q konstruierbare Zahlen sind.

Beweis. Da wir Orthogonalen konstruieren können, sind die Koordinaten-Achsen konstruierbar. Aus $(p, 0)$ können wir mit dem Zirkel dann $(-p, 0)$, $(0, p)$, $(0, -p)$ als Schnittpunkte mit den Achsen konstruieren etc. Analog gilt die Aussage über $x \in \mathbb{R}$. Per Induktion ist die Aussage über die natürlichen Zahlen klar, da man sich mit dem Zirkel immer um 1 weiterhangeln kann. Die letzte Aussage erhalten wir, da wir auch in $(p, 0)$ und $(0, q)$ die Orthogonalen zu den Koordinaten-Achsen ziehen können, die sich ja in (p, q) treffen und umgekehrt. \square

Natürlich heißt die Tatsache, dass die x -Achse konstruierbar ist, noch längst nicht, dass jeder Punkt $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ der x -Achse konstruierbar ist. Die konstruierbaren Punkte sind aber immerhin abgeschlossen bzgl. der arithmetischen Operationen:

Lemma 4.4. Die konstruierbaren Punkte bilden einen Körper.

Beweis. Wir müssen nur die Operationen $+$, $-$, \cdot , $/$ mit Konstruktionen realisieren können. Dies erledigen die Konstruktionen in Abb. 4.1. \square

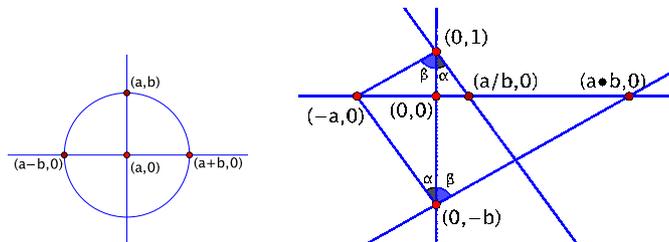


Abbildung 4.1. Die konstruierbaren Zahlen bilden einen Körper.

Definition 4.5. Wir nennen einen Körper \mathbb{K} **euklidischen Körper**, falls aus $x \in \mathbb{K}, x > 0$ folgt, dass $\sqrt{x} \in \mathbb{K}$, wobei \sqrt{x} eine Zahl ist, für die gilt, dass $\sqrt{x}^2 = x$ ist.

Natürlich ist \mathbb{R} ein euklidischer Körper; es gilt aber auch:

Lemma 4.6. Die konstruierbaren Punkte bilden einen euklidischen Körper.

Beweis. Dies zeigt die Konstruktion in Abb. 4.2, da wir den Höhensatz im Dreieck der Punkte $(0, 1), (\sqrt{c}, 0), (0, -c)$ anwenden können. \square

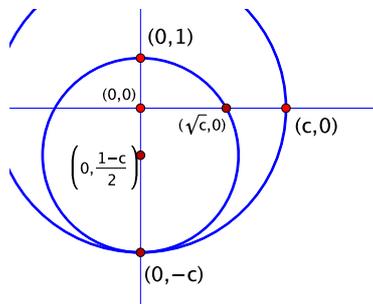


Abbildung 4.2. Die konstruierbaren Punkte bilden einen euklidischen Körper.

Wesentlich für die Theorie der konstruierbaren Punkte ist die folgende Konstruktion:

Lemma/Definition 4.7. Ist \mathbb{K} ein Körper und $d \in \mathbb{K}, d > 0$, aber $\sqrt{d} \notin \mathbb{K}$, dann ist

$$\mathbb{K}(\sqrt{d}) := \{p + q\sqrt{d} \mid p, q \in \mathbb{K}\}$$

ein Körper.

$\mathbb{K}(\sqrt{d})$ ist dann eine sogenannte **quadratische Erweiterung** von \mathbb{K} . Sind $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}(\sqrt{d_1}), \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{d_2}), \dots, \mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}(\sqrt{d_n})$, so schreiben wir kurz

$$\mathbb{K}_n = \mathbb{K}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

und nennen jeden der Körper $\mathbb{K}, \mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n$ eine **iterierte quadratische Erweiterung** von \mathbb{K} . Mit \mathbb{E} bezeichnen wir die Vereinigung aller iterierten quadratischen Erweiterungen von \mathbb{Q} .

Beweis. Sehr leicht. Man muss nur zeigen, dass die Operationen wieder ein Element der Form $p + q\sqrt{d}$ liefern. Dies ist analog zur Konstruktion der komplexen Zahlen (bei der allerdings $d = -1 < 0$ ist). \square

Die Galoistheorie erklärt solche und ähnliche Konstruktionen von Erweiterungskörpern und deren Zusammenhang zu Polynomen und Gruppen sehr detailliert. Leider können wir hier nicht weiter darauf eingehen.

Mit der obigen Definition folgt direkt mit Lemma 4.6:

Proposition 4.8. *Ist $x \in \mathbb{E}$, so ist x eine konstruierbare Zahl.*

Im Rest dieses Abschnittes werden wir zeigen, dass auch die Umkehrung gilt, dass also jede konstruierbare Zahl in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegt. Die Idee dazu ist einfach, dass beim Lösen der Gleichungen, die beim Schnitt von Gerade mit Gerade, Gerade mit Kreis bzw. Kreis mit Kreis, immer nur quadratische Gleichungen auftreten, die wir natürlich mit Quadratwurzel ziehen berechnen können.

Wer sich für die Details interessiert, kann die folgenden Lemmata entweder selbst beweisen oder in [Mar98, Lemma 2.11–2.14] nachlesen; wir zeigen nur das erste:

Lemma 4.9. *Falls eine Gerade durch zwei Punkte geht, die Koordinaten in einem Körper \mathbb{K} haben, hat die Gerade eine Gleichung mit Koeffizienten in \mathbb{K} . Haben der Mittelpunkt eines Kreis und ein Punkt auf dem Kreis Koordinaten in \mathbb{K} , so hat der Kreis eine Gleichung mit Koeffizienten in \mathbb{K} .*

Beweis. Eine Gleichung der Geraden durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.$$

Der Kreis durch (s, t) mit Mittelpunkt (p, q) hat die Gleichung

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = (s - p)^2 + (t - q)^2 = 0.$$

Ausmultiplizieren und auf eine Seite Bringen liefert:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + s(2p - s) + t(2q - t) = 0.$$

Geraden- und Kreisgleichung haben also alle Koeffizienten in \mathbb{K} . \square

Lemma 4.10. *Haben zwei sich schneidende Geraden Gleichungen mit Koeffizienten in einem Körper \mathbb{K} , so hat auch deren Schnittpunkt Koordinaten in \mathbb{K} .*

Lemma 4.11. *Schneiden sich eine Gerade und ein Kreis und haben beide Gleichungen mit Koeffizienten in einem Körper \mathbb{K} , so haben auch deren Schnittpunkte Koordinaten in \mathbb{K} oder in einer quadratischen Erweiterung von \mathbb{K} .*

Lemma 4.12. *Haben zwei sich schneidende Kreise Gleichungen mit Koeffizienten in einem Körper \mathbb{K} , so haben auch deren Schnittpunkte Koordinaten in \mathbb{K} oder in einer quadratischen Erweiterung von \mathbb{K} .*

Diese Lemmata liefern zusammen mit Proposition 4.8 unmittelbar den folgenden Hauptsatz:

Satz 4.13 (Hauptsatz über die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal). *Ein Punkt ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn seine Koordinaten in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegen.*

Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist konstruierbar genau dann, wenn x in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegt.

4.2 Lösung einiger klassischer unmöglicher Aufgaben mittels Ortskurven

Wir erklären nun, wie man unter Zuhilfenahme gewisser zusätzlicher Kurven doch einige Punkte konstruieren kann, die nicht in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegen.

Unsere Beispiele sind die klassischen, die auch schon die Griechen vor mehr als 2000 Jahren interessiert haben. Zunächst werden wir, wie die Griechen, zeigen, wie man einige der berühmten Probleme, wie die Winkeldreiteilung und die Würfelverdopplung, realisieren kann. Erst danach zeigen wir mit Hilfe des Hauptsatzes über die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, dass diese tatsächlich — wie von den Griechen vermutet, aber nicht bewiesen wurde — nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen sind. Dies ist eines der vielen wichtigen Resultate der Mathematik des 19. Jahrhunderts.

4.2.1 Würfelverdopplung mit der Konchoide des Nikomedes

Die klassische Aufgabe der **Würfelverdopplung** lautet: Ist eine Kante r eines Würfels gegeben, so konstruiere man mit Zirkel und Lineal eine Kante der Länge $r\sqrt[3]{2}$ eines Würfels mit doppeltem Volumen.

Abb. 4.5 angegeben, zeichnen wir eine Gerade in U , die mit der horizontalen einen Winkel von 60° einschließt. Diese Gerade schneidet den rechten Zweig der Kurve in einem Punkt S . Bezeichnen wir den Ursprung $(0,0)$ mit O , so trifft die Gerade OS die Basis der Konchoide (also die Vertikale durch U) in einem Punkt T . Wir werden zeigen, dass $x := |OT| = \sqrt[3]{a}$ die gesuchte Länge der Kante des verdoppelten Würfels ist.

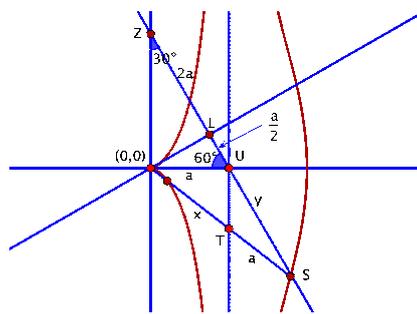


Abbildung 4.5. Würfelverdopplung mit der Konchoide.

Dazu bemerken wir zunächst, dass nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{x}{a} = \frac{|OT|}{|TS|} = \frac{|UZ|}{|US|} = \frac{2a}{y}, \quad \text{d.h. } xy = 2a^2. \quad (4.1)$$

Die Länge $|UZ| = 2a$ ergibt sich dabei, weil $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und im Dreieck OUZ gilt: $\cos 60^\circ = \frac{|OU|}{|UZ|} = \frac{a}{|UZ|}$.

Im rechtwinkligen Dreieck OSL (L ist konstruiert als Fußpunkt des Lots von O auf UZ) gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$(x+a)^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + |OL|^2.$$

Im Dreieck OLU gilt:

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + |OL|^2,$$

insgesamt ergibt sich also durch Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$(x+a)^2 - a^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}, \quad \text{d.h. } x^2 + 2ax = y^2 + ay. \quad (4.2)$$

Setzen wir nun die aus (4.1) folgende Identität $2a = \frac{xy}{a}$ in (4.2) ein, ergibt sich:

$$x^2 + \frac{x^2 y}{a} = y^2 + ay \iff \frac{x^2}{a}(a+y) = y(a+y) \iff x^2 = ay \iff y = \frac{x^2}{a}.$$

Dies können wir nun wieder in (4.2) einsetzen und ay auf beiden Seiten der Gleichung subtrahieren, so dass wir erhalten:

$$y^2 = 2ax.$$

Einsetzen der vorigen Gleichung $y = \frac{x^2}{a}$ liefert schließlich:

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax \iff x = a\sqrt[3]{2}.$$

Dies zeigt, dass die Konchoide von Nikomedes tatsächlich zur Würfelverdopplung verwendet werden kann. Aber hätten Sie, ausgehend vom Problem, den Würfel zu verdoppeln, genauso wie Nikomedes diese (oder eine andere) Kurve gefunden, die das erlaubt?

4.2.2 Winkeldreiteilung mit der Konchoide des Nikomedes

Die klassische Aufgabe der **Winkeldreiteilung** lautet: Sind drei Punkte ABC gegeben, so dass $\angle ABC = \alpha$, so konstruiere man (mit Zirkel und Lineal) drei Punkte PQR , so dass $\angle PQR = \frac{1}{3}\alpha$.

Wir werden später sehen, dass diese Aufgabe, genauso wie die Würfelverdopplung, nicht lösbar ist. Eine Methode, mit der man aber doch jeden Winkel dritteln kann, benutzt wieder die Konchoide des Nikomedes; siehe beispielsweise [Sch49, S. 107].

4.2.3 Quadratur des Kreises mit der Quadratrix des Dinostratus

10. Vorl. — 09. Jan. '08
Unlösbarkeit der klassischen Probleme

Läuft M mit konstanter Geschwindigkeit von $A = (1, 0)$ gegen der Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis und L ebenso auf der Vertikalen durch $O = (0, 0)$ nach oben, so wird der Ort aller Punkte P , die sich als Schnittpunkt der Horizontalen durch L mit der Geraden OM ergeben, **Quadratrix des Dinostratus** genannt, siehe Abb. 4.6.

Ihr Name kommt daher, dass man sie zur Lösung der Aufgabe der **Quadratur des Kreises** verwenden kann: Ist der Radius r eines Kreises gegeben, so konstruiere man eine Länge x , so dass das Quadrat mit Seitenlänge x die Fläche des Kreises besitzt, dass also $x^2 = \pi r^2$.

Um zu zeigen, wie man die Quadratrix zur Lösung dieser Aufgabe verwenden kann, stellen wir zunächst fest, dass wegen ihrer Erzeugung die Beziehung gilt:

$$\frac{\widehat{AM}}{\widehat{AB}} = \frac{|OL|}{|OB|},$$

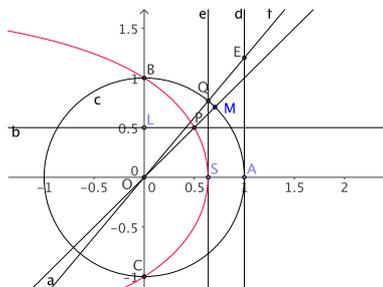


Abbildung 4.7. Die Quadratur des Kreis mit der Quadratrix.

4.3 Unlösbarkeit der klassischen Probleme für Zirkel und Lineal

Wir beweisen nun, dass die klassischen Probleme der Winkeldreiteilung, Würfelverdopplung und der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal tatsächlich nicht zu lösen sind. Wieder folgen wir der Darstellung in [Mar98].

4.3.1 Winkeldreiteilung und Würfelverdopplung

Wie schon erwähnt, lautet die klassische Aufgabe der Winkeldreiteilung: Ist ein Winkel α gegeben, so konstruiere man (mit Zirkel und Lineal) den Winkel $\frac{1}{3}\alpha$.

Natürlich ist es für manche Winkel sehr einfach möglich, diese Aufgabe zu lösen, im Allgemeinen ist sie aber unlösbar. Offensichtlich mit Zirkel und Lineal lösbare Fälle sind beispielsweise $\alpha = 180^\circ$ (da nach Euklids erster Proposition der Winkel 60° konstruierbar ist) und damit auch $\alpha = 90^\circ$ (da die Halbierung des Winkels 60° mit Zirkel und Lineal möglich ist).

Um die Unlösbarkeit der Winkeldreiteilungsaufgabe mit Zirkel und Lineal zu beweisen, reicht es aber, einen Winkel anzugeben, der nicht dreiteilbar ist. Wir werden sehen, dass schon der Winkel 60° nicht dreiteilbar ist! Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass der Winkel 20° nicht konstruierbar ist. Dazu benötigen wir einige algebraische Vorbemerkungen. Wir beginnen mit der folgenden:

Proposition 4.14. Falls das Polynom

$$F(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + gx + h$$

ganzzahlige Koeffizienten und eine rationale Nullstelle $\frac{p}{q}$ hat, wobei p und q ganze Zahlen ohne gemeinsamen nichttrivialen Faktor² sind, so gilt: $p \mid h$ und $q \mid a$.

²d.h. ohne gemeinsamen Faktor, der größer als 1 ist

Beweis. Wir gehen ähnlich wie beim wohlbekanntem Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ vor: Einsetzen der Nullstelle $\frac{p}{q}$ in $F(x)$ und anschließendes Durchmultiplizieren mit dem Nenner q^n , liefert die Gleichung:

$$ap^n + bp^{n-1}q + \dots + gpq^{n-1} + hq^n = 0.$$

Da p die rechte Seite der Gleichung und auch alle Terme der linken Seite außer dem letzten teilt, muss p auch hq^n teilen. Da p nicht q teilt, muss h durch p teilbar sein. Analog teilt q alle Terme der linken Seite außer dem ersten, so dass a durch q teilbar ist. \square

Dieses allgemeine Resultat reicht uns aber noch nicht aus; wir benötigen eine konkrete Aussage, um wirklich etwas beweisen zu können, und zwar:

Proposition 4.15. *Falls ein kubisches Polynom in einer Variablen keine rationale Nullstelle hat, so ist keine der Nullstellen konstruierbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dass a, b, c rationale Zahlen sind und dass die kubische Gleichung $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zwar keine rationale Nullstelle aber eine Nullstelle hat, die eine konstruierbare Zahl ist. Sei $F_0 = \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine kleinste ganze Zahl k , so dass die Kubik eine konstruierbare Nullstelle r hat, die in einer iterierten quadratischen Erweiterung F_k von \mathbb{Q} mit $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_k})$ liegt. Sei $F_i = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_i})$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$; also: $F_i = F_{i-1}(\sqrt{d_i})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Nach unserer Annahme existieren $p, q \in F_{k-1}$ mit $r = p + q\sqrt{d_k}$. Es gilt $q \neq 0$, da sonst $r \in F_{k-1}$ und dann wäre k nicht minimal.

Nun betrachten wir die Identität:

$$\begin{aligned} (p \pm q\sqrt{d_k})^3 + a(p \pm q\sqrt{d_k})^2 + b(p \pm q\sqrt{d_k}) + c \\ = (p^3 + 3pq^2d_k + ap^2 + aq^2d_k + bp + c) \pm (3p^2q + q^3d_k + 2apq + bq)\sqrt{d_k}. \end{aligned}$$

Diese zeigt, dass $p - q\sqrt{d_k}$ eine Nullstelle der Kubik $f(x)$ ist, falls $p + q\sqrt{d_k}$ eine ist. Die Nullstellen $p + q\sqrt{d_k}$ und $p - q\sqrt{d_k}$ sind verschieden, da $q \neq 0$. Sei t die dritte Nullstelle der Kubik $f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - t)(x - (p + q\sqrt{d_k}))(x - (p - q\sqrt{d_k})) \\ &= (x - t)(x^2 - 2px + p^2 - q^2d_k) \end{aligned}$$

für alle x . Ein Vergleich der Koeffizienten von x^2 zeigt, dass $a = -t - 2p$, also $t = -a - 2p$, so dass $t \in F_{k-1}$, weil $a \in F_{k-1}$ und $p \in F_{k-1}$. Aber dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von k , da t eine Nullstelle der Kubik $f(x)$ ist, von der wir angenommen haben, dass keine ihrer Nullstellen in F_{k-1} liegt. \square

Kommen wir nun zum Problem der Winkeldreiteilung. Zunächst zeigen wir, dass ein Winkel genau dann konstruierbar ist, wenn der Cosinus des Winkels konstruierbar ist:

Proposition 4.16. *Es gibt drei konstruierbare Punkte P, Q, R , so dass $\angle PQR = \alpha$ genau dann, wenn $\cos \alpha$ eine konstruierbare Zahl ist.*

Beweis. Abbildung 4.8 zeigt die Behauptung, da sowohl der Kreis um Q mit Radius 1 als auch Senkrechten und Schnittpunkte konstruierbar sind. \square

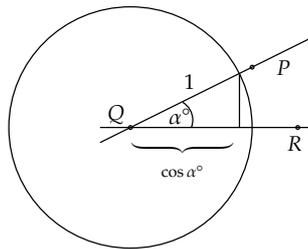


Abbildung 4.8. Konstruierbarkeit eines Winkels.

Um nachzuweisen, dass der Winkel 20° nicht konstruierbar ist, reicht es also zu zeigen, dass die Zahl $\cos 20^\circ$ nicht konstruierbar ist. Dazu werden wir einige trigonometrische Formeln und die obigen Propositionen verwenden.

Wir beginnen mit den wohlbekannten Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Ausgehend davon können wir leicht weitere Formeln folgern:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos(2\alpha) &= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = 1 - 2(\sin \alpha)^2 = 2(\cos \alpha)^2 - 1, \\ \sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cdot (4(\cos \alpha)^2 - 1), \\ \cos(3\alpha) &= \cos(\alpha + 2\alpha) = 4(\cos \alpha)^3 - 3 \cos \alpha.\end{aligned}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen erhalten wir, indem wir mit 2 durchmultiplizieren:

$$(2 \cos \alpha)^3 - 3(2 \cos \alpha) - 2 \cos(3\alpha) = 0.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man schließlich das folgende Lemma beweisen, wenn man bedenkt, dass:

$$\cos(3(\alpha + 120^\circ)) = \cos(3(\alpha + 240^\circ)) = \cos(3\alpha).$$

Die Details führen wir hier nicht aus, da man die Behauptung natürlich auch leicht mit einem Computer Algebra Programm nachprüfen kann:

Lemma 4.17. Die Gleichung $x^3 - 3x - 2 \cos(3\alpha) = 0$ hat die Nullstellen: $2 \cos \alpha$, $2 \cos(\alpha + 120^\circ)$, $2 \cos(\alpha + 240^\circ)$.

Schließlich können wir das Gewünschte beweisen:

Satz 4.18. Die Zahl $\cos 20^\circ$ und daher der Winkel 20° sind nicht konstruierbar: Die Aufgabe der Winkeldreiteilung ist im Allgemeinen nicht (mit Zirkel und Lineal) lösbar.

Beweis. Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, sehen wir, wenn wir im vorigen Lemma $3\alpha = 60^\circ$ setzen, dass $x^3 - 3x - 1$ die Nullstellen $2 \cos 20^\circ$, $2 \cos 140^\circ$, $2 \cos 260^\circ$ hat. Da diese Kubik nach Proposition 4.14 keine rationale Nullstelle hat, ist keine der vorigen Zahlen nach der Proposition 4.15 konstruierbar. Die Proposition 4.16 beweist nun, dass der Winkel 20° nicht konstruierbar ist. \square

Wir haben also das erste der Konstruktions-Probleme, die die Griechen ungelöst hinterlassen haben, geklärt: die Winkeldreiteilung ist im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen.

Ohne Rechenarbeit können wir mit den obigen Vorarbeiten auch das zweite Konstruktions-Problem der Griechen lösen:

Satz 4.19. Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar, d.h. die Aufgabe der Würfelverdopplung ist (mit Zirkel und Lineal) nicht lösbar.

Beweis. Dies folgt direkt aus Proposition 4.15, da nach Proposition 4.14 die Kubik $x^3 - 2$ keine rationale Nullstelle besitzt. \square

Der erste Beweis der Unlösbarkeit der obigen beiden Probleme lieferte der Franzose Pierre Laurant Wantzel (1814–1848) im Jahr 1837. Es dauerte nicht lange, bis auch das dritte der griechischen Konstruktions-Probleme gelöst wurde, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

4.3.2 Quadratur des Kreises

Die klassische Aufgabe der **Quadratur des Kreises** lautet, wie oben schon erwähnt: Ist der Radius r eines Kreises gegeben, so konstruiere man eine Länge x , so dass das Quadrat mit Seitenlänge x die Fläche des Kreises besitzt, dass also $x^2 = \pi r^2$.

Wie wir wissen, muss zur Lösbarkeit dieser Aufgabe mit Zirkel und Lineal die Zahl $\sqrt{\pi}$ konstruierbar, also eine iterierte Quadratwurzel, sein. Dies ist natürlich gleichbedeutend mit der Frage, ob π selbst eine iterierte Quadratwurzel ist. Der Deutsche Ferdinand Lindemann (1852–1939) zeigte im Jahr 1882, dass dies nicht der Fall ist; genauer bewies er sogar, dass π Nullstelle gar

keines Polynomes mit rationalen Koeffizienten sein kann, dass π also **transzendent** ist. Eine Zahl, die im Gegensatz dazu Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist, heißt **algebraische Zahl**. Lindemanns Beweis ist recht schwierig nachvollziehbar, doch einige Jahre nach ihm lieferte David Hilbert einen wesentlich einfacheren Beweis, der recht gut lesbar ist und von dem es im Internet bis ins Detail ausgearbeitete Varianten gibt, beispielsweise von N. Engbers oder R. Fritsch, die noch besser zu verstehen sind.

Wir geben hier nur einen sehr kurzen Beweis mit Hilfe eines allgemeinen Satzes, den wir hier nicht zeigen können:

Satz 4.20 (Lindemann / Weierstrass). Für alle paarweise verschiedenen algebraischen Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und für alle algebraischen Zahlen β_1, \dots, β_n gilt:

$$\sum_{i=0}^n \beta_i \cdot e^{\alpha_i} \neq 0,$$

d.h.: Alle e^{α_i} mit paarweise verschiedenen algebraischen Exponenten sind linear unabhängig über dem Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ aller algebraischen Zahlen.

Wie schon erwähnt, folgt daraus sehr einfach:

Satz 4.21. π ist transzendent.

Beweis. Nehmen wir an, dass π algebraisch ist. Wegen $i^2 = -1$ und weil die algebraischen Zahlen einen Körper bilden, sind dann $i \cdot \pi$ und $2 \cdot i \cdot \pi$ algebraisch. Wir setzen nun:

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \alpha_1 = i \cdot \pi, \alpha_2 = 2 \cdot i \cdot \pi.$$

Dann folgt:

$$1 \cdot e^{i \cdot \pi} + 1 \cdot e^{2 \cdot i \cdot \pi} = -1 + 1 = 0,$$

was im Widerspruch zum Satz von Lindemann / Weierstrass steht. \square

Auf ähnliche Weise kann man übrigens auch zeigen, dass e transzendent ist. Außerdem gibt es, wie schon erwähnt, auch den elementar sehr gut nachvollziehbaren Beweis von Hilbert, der zwar sehr lesenswert ist, den wir hier aber aus Zeitmangel leider nicht vorführen können.

4.3.3 Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke

Ein weiteres klassisches Aufgabe ist die Konstruktion eines regelmäßigen n -Eckes mit Zirkel und Lineal. Wir wissen bereits, dass wir sowohl regelmäßige Dreiecke, Vierecke als auch Sechsecke (nämlich bestehend aus sechs

regelmäßigen Dreiecken) konstruieren können. Doch wie sieht es für beliebige regelmäßige n -Ecke aus?

Mit etwas Arbeit kann man auch eine Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks erreichen. Daher könnte man meinen, dass man jedes beliebige n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, doch weit gefehlt.

Wir können die Vorbereitungen der vorigen Abschnitte verwenden, um zu beweisen, dass regelmäßige 7-Ecke und 9-Ecke nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind; dazu ist nicht sehr viel Mehraufwand nötig. Für das 7-Eck geht man ähnlich vor wie beim Unmöglichkeitbeweis der Winkeldreiteilung, allerdings führt das Problem in diesem Fall auf ein Polynom vom Grad 7; für Details siehe [Mar98, S. 45].

Die Unmöglichkeit der Konstruktion des 9-Eckes können wir noch leichter verstehen, da wir alle nötigen Resultate bereits hergeleitet haben: Der Innenwinkel eines regelmäßigen 9-Eckes ist nämlich $\frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 40^\circ$ (Abb. 4.9); könnten wir ein regelmäßiges 9-Eck konstruieren, so könnten wir also auch einen Winkel von 40° konstruieren, was aber nicht möglich ist, da wir gezeigt haben, dass ein Winkel von 20° nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

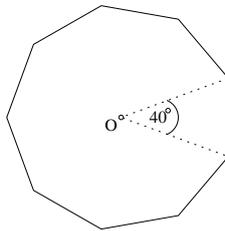


Abbildung 4.9. Ein regelmäßiges 9-Eck hat einen Innenwinkel von $\frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 40^\circ$ und ist daher nicht konstruierbar.

Wir möchten hier keine weiteren Spezialfälle der Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke ausführen, sondern nur noch das allgemeine Resultat angeben, das auch vom schon bei der Winkeldreiteilung und Würfelverdopplung erwähnten Pierre Laurent Wantzel bewiesen und zuvor von Gauß annonciert wurde:

Satz 4.22 (Gauß / Wantzel). *Ein regelmäßiges n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $n > 2$ eine natürliche Zahl ist, so dass der größte ungerade Faktor von n entweder 1 oder ein Produkt verschiedener Fermat-Primzahlen ist. Eine Fermat-Primzahl ist hierbei eine Primzahl der Form $F_k := 2^{2^k} + 1$. Also:*

$$n = 2^i \cdot F_{k_1} \cdot F_{k_2} \cdots F_{k_m}$$

für gewisse $i, k_j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ mit F_{k_j} prim und k_j paarweise verschieden.

Der Franzose Pierre de Fermat (1601–1665)³ meinte übrigens, einen Beweis dafür zu kennen, dass F_k Primzahlen sind für alle k . Tatsächlich sind $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ Primzahlen, doch 1732 konnte Leonhard Euler (1701–1783) beweisen, dass F_5 keine Primzahl ist, da $F_5 = 641 \cdot 6700417$. Bisher ist keine weitere Fermat-Primzahl bekannt.

Obwohl das obige Resultat im Prinzip die Frage nach der Konstruierbarkeit regelmäßiger n -Ecke beantwortet, ist natürlich gar nicht offensichtlich, wie ein konstruierbares regelmäßiges n -Eck tatsächlich konstruiert werden kann. Ein regelmäßiges 17-Eck ist schon recht aufwendig zu realisieren, ein regelmäßiges 65537-Eck dagegen unglaublich kompliziert: Oswald Hermes (1826–1909) verbrachte 10 Jahre damit, die Konstruktion durchzuführen!

³Fermat ist neuerdings auch Nicht-Mathematikern bekannt geworden durch seinen sogenannten *letzten Satz*, der aussagt, dass eine Gleichung der Form $a^n + b^n = c^n$ für $n \geq 3$ keine ganzzahligen Lösungen $\neq 0$ besitzt. Bewiesen hat Fermat selbst allerdings nur einige Spezialfälle, obwohl er behauptete, einen allgemeinen Beweis zu kennen. Doch erst mehr als 300 Jahre später, nämlich 1994, lieferte der Engländer Andrew Wiles wirklich einen Beweis, der jedoch sehr schwer verständlich ist und auf moderner algebraischer Geometrie und Zahlentheorie beruht.

Überblick: Aktuelle Dynamische Geometrie Software

11. Vorl. — 16. Jan. '08
Überblick: Aktuelle
Software

Wir geben nun einen kurzen Überblick über die unserer Meinung nach derzeit (im Januar 2008) wichtigsten Dynamische Geometrie Systeme und diskutieren jeweils einige ihrer Vor- und Nachteile.

Insbesondere werden wir auf ihre Fähigkeiten, Ortskurven zu zeichnen eingehen; in diesem Punkt unterscheiden sich die meisten Systeme nämlich erheblich, da manche versuchen, Kontinuität zu realisieren, andere nicht.

Natürlich werden auch andere Aspekte angesprochen, wie beispielsweise die Einfachheit der Benutzung sowie die Qualität der ausgedruckten Konstruktionen und die Möglichkeit, die dynamische Konstruktion im WWW zu veröffentlichen.

Selbstverständlich müssen wir uns hier aber auf einige uns wichtig erscheinende Punkte und auch auf einige wenige Systeme beschränken; wir haben die folgenden Programme ausgewählt:

- C 1.4 2.0, entwickelt von Ulrich Kortenkamp (Prof. an der Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd) und Jürgen Richter-Gebert (Prof. an der TU München).
- E D G 3.0, entwickelt von Roland Mechling.
- G G 3.0, entwickelt von Markus Hohenwarter (derzeit Gast-Prof. an der Florida Atlantic University) und anderen.
- GEONE T 1.7.1, entwickelt von der GEONExT Gruppe unter der Leitung von Peter Baptist (Prof. an der Uni Bayreuth).
- C II P entwickelt von der Firma Cabrilog in Grenoble.

5.1 Veröffentlichen von dynamischen Konstruktionen im Web — ein HTML-Crashkurs

Bevor wir auf die einzelnen Dynamischen Geometrie Systeme eingehen, geben wir hier einen kurzen Überblick zum Thema Veröffentlichen im Web, damit wir später verstehen können, was die einzelnen Programme produzieren, wenn man sie auffordert, eine Konstruktion als HTML-Seite zu exportieren.

Die Webseite <http://de.selfhtml.org> gibt sowohl einen guten Überblick und bildet gleichzeitig ein hervorragendes Nachschlagewerk zu vielen Themen im Bereich der technischen Hintergrundinformationen zur Veröffentlichung im Internet. Insbesondere liefert die Webseite alle nötigen Informationen zur Webseiten-Beschreibungssprache HTML, mit vielen Beispielen. Wir geben hier daher nur einen sehr kurzen Überblick.

Ähnlich wie bei \LaTeX werden die einzelnen Formatierungen in HTML durch Kommandos (sogenannte **Tags**) festgelegt. Leerzeichen und Leerzeilen werden meist nicht beachtet; sie dienen nur der Trennung von Wörtern usw. In HTML beginnt fast jedes Kommando mit einem Anfangs-Tag und einem End-Tag. Beispielsweise beginnt ein HTML-Dokument mit dem Anfangs-Tag `<html>` und endet mit dem dazu passenden End-Tag `</html>`. Die folgende HTML-Datei sollte recht selbsterklärend sein. Um sie in einem Browser betrachten zu können, muss man sie als Text-Datei (z.B. in WordPad) abspeichern, allerdings mit der Datei-Endung `.html` statt `.txt`.

```
<html>

<head>
  <title>Der Titel der Seite</title>
</head>

<body>

<h1>Eine Überschrift</h1>
<p>Etwas Text. Unten ein zentriertes Bild:</p>
<center></center>

<h2>Eine Unter-Überschrift</h2>
<p>Noch mehr Text.</p>

<h2>Noch eine Unter-Überschrift</h2>
<p>Noch mehr Text.</p>
<p>Ein Link: <a href="meinpdf.pdf">ein PDF</a>.</p>

</body>
```

```
</html>
```

Jeder Tag kann aber noch weitere Parameter beinhalten, die beispielsweise die Formatierung der Ausgabe beeinflussen. Ein Beispiel ist beim `` Tag oben zu sehen; dort gibt `src=...` an, welche Bild-Datei angezeigt werden soll und die Parameter `width` und `height` bestimmen, welche Breite und Höhe in Bildschirmpixeln die Grafik haben soll.

Seit einigen Jahren gibt es sehr ausgefeilte Methoden zum Formatieren von Webseiten. Insbesondere bieten sogenannte Cascading Style Sheets (CSS) umfangreiche und sehr detaillierte Möglichkeiten, das Aussehen jedes einzelnen Tags zu bestimmen, beispielsweise in Farbe, Größe, Form etc.

Ruft man die oben abgedruckte Datei in einem Browser auf, werden die Standard-Schriftarten, -Größen, -Schriftfarben, -Hintergrundfarben, etc. verwendet. Der große Vorteil an CSS ist, dass das einfache Hinzufügen eines einzelnen Tags das Aussehen der gesamten Seite entsprechend der Vorgaben in der im Tag angegebenen CSS-Datei verändert, ohne dass der Code der Seite weiter angepasst werden müsste.

Zwei Beispiele für Änderungen des Layouts mit CSS sind die folgenden. Im ersten wird das Aussehen des nur einmal pro HTML-Seite auftauchenden `body`-Tags festgelegt: Links und rechts soll 5% des Browser-Fenters ohne Inhalt bleiben, die Hintergrundfarbe soll `#ff0000` (d.h. rot, Angaben als RGB-Farben) sein und die Standard-Schriftgröße soll 12pt betragen.

```
body {
    margin-left: 5%;
    margin-right: 5%;

    background-color: #ff0000;

    font-size: 12pt;}
```

Auch jeden einzelnen Überschriften-Typ kann man anpassen, z.B.:

```
h1 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 24px;
    color: #293852;
    line-height: 170%;
    margin-left: 0%;
    margin-right: 0%;
    margin-top: 16px;
    margin-bottom: 8pt;
    text-align: left; }
```

Hat man solche Befehle in eine Datei namens `formats.css` geschrieben, so kann man das Layout der obigen HTML-Seite entsprechend verändern, indem man im Kopf (zwischen die beiden `head`-Tags) die Zeile

```
<link rel=stylesheet type="text/css" href="formats.css">
```

einfügt.

Alle oben erwähnten Dynamischen Geometrie Systeme können eine gültige HTML-Datei exportieren, in der mittels Java-Applet (der entsprechende Tag heißt `<applet>`) eine dynamische Konstruktion direkt in eine HTML-Seite eingebunden werden kann. Nur Euklid DynaGeo 3.0f unterstützt allerdings hierbei nicht alle in Euklid DynaGeo 3.0f verfügbaren Funktionen, so dass man sich beim Export auf einfache Konstruktionen beschränken muss.

Mit Hilfe der obigen Informationen und der angegebenen Webseite SELF-HTML sollte es jedem Leser recht leicht möglich sein, diese von den Software Systemen exportierten HTML-Dateien den eigenen Bedürfnissen anzupassen. Natürlich gibt es auch viele Programme, mit denen man in Word-ähnlicher Manier HTML-Seiten manipulieren kann (kostenfreie und kommerzielle); da deren Anzahl aber inzwischen recht groß geworden ist, machen wir hier keine konkreten Vorschläge.

5.2 Die einzelnen Programme

Wir gehen die kostenfreien Programme in alphabetischer Reihenfolge durch und besprechen dann das kostenpflichtige Programm Cabri.

5.2.1 Cinderella 1.4

...

5.2.2 Euklid DynaGeo 3.0f

...

5.2.3 GeoGebra 3.0

...

5.2.4 GEONExT

...

5.2.5 Cabri II Plus

...

5.3 Tabellarische Übersicht

...

Programm	Determinismus	Kontinuität	vollst. Ortskurven
Cinderella 1.4	nein	ja (komplex)	ja
Cinderella 2	nein	ja (komplex)	ja
DynaGeo 3.0f	ja	nein	selten
GeoGebra 3.0	ja	teilweise (reell)	recht häufig
GEONExT	ja	nein	selten
Cabri II Plus	ja	nein	selten

Programm	Ausdruck-Qualität	Webseite	besondere Features
Cinderella 1.4	gut (Schrift nicht)	ja	autom. Beweisen, Aufgaben
Cinderella 2	sehr gut (Formeln!)	ja	autom. Beweisen, Aufgaben
DynaGeo 3.0f	schlecht	teilw.	
GeoGebra 3.0	sehr gut (Formeln!)	ja	LaTeX-Anbindung
GEONExT	gut	ja	
Cabri II Plus	gut	ja	Schnittpkte. m. Ortskurven

Programm	Intuitivität der Benutzung
Cinderella 1.4	hoch
Cinderella 2	sehr hoch
DynaGeo 3.0f	hoch
GeoGebra 3.0	sehr hoch
GEONExT	sehr hoch
Cabri II Plus	sehr hoch

Erste Eigenschaften von Ortskurven

Am Auffälligsten sind sicher bei den klassischen Ortskurven jene Punkte, durch die eine Ortskurve entweder mehrfach läuft oder aber ihre Richtung abrupt ändert (siehe Abb. 4.4, rechts bzw. links); allgemeiner heißen solche Punkte **Singularitäten**. Die einfachsten dieser Punkte — und insbesondere jene in den Abbildungen — heißen **gewöhnlicher Doppelpunkt** (oder **Knotenpunkt**) bzw. **gewöhnliche Spitze** (Abb. 6.1). Um solche Punkte wenigstens

12. Vorl. — 22. Jan. '08
Tangenten und Singularitäten algebraischer Kurven

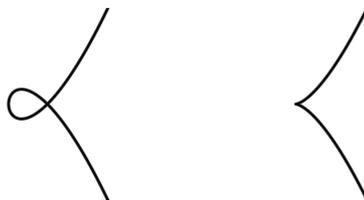


Abbildung 6.1. Eine Kurve mit einem gewöhnlichen Knotenpunkt ($y^2 - x^2 - x^3 = 0$) und eine mit einer gewöhnlichen Spitze ($y^2 - x^3 = 0$).

etwas zu verstehen, betrachten wir zunächst Tangenten an algebraische Kurven (wie in [Fis94]), da jede Ortskurve, die durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal entsteht, im Wesentlichen eine algebraische Kurve ist.

Interessanter Weise hängen die Singularitäten, die ja eine lokale Eigenschaft von Kurven sind, auch mit der globalen Frage, ob eine ganze Kurve rational parametrisiert werden kann, zusammen.

6.1 Eine Ortskurve als algebraische Kurve

Bevor wir algebraische Kurven ein wenig verstehen wollen, betrachten wir ein Beispiel, das verdeutlicht, warum man bei der Aussage, dass Ortskurven, die durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal entstehen, algebraische Kurven sind, genau aufpassen muss.

Unser Beispiel ist die sogenannte **Pascalsche Schnecke**. Dies ist genauer gesagt eine Familie von ebenen Kurven $S_{a,b}$, $a, b \neq 0$, die man durch die Polargleichung

$$S_{a,b}: r = a + b \cos \varphi$$

beschreiben kann. Von dieser Gleichung ausgehend, ist es einfach, die Pascalsche Schnecke als Ortskurve mit Zirkel und Lineal zu konstruieren (Abb. 6.2).

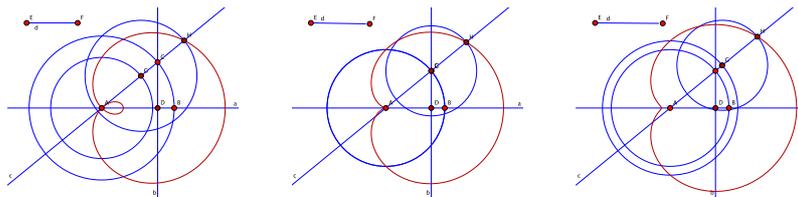


Abbildung 6.2. Die Pascalsche Schnecke als Ortskurve einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

Wir konzentrieren uns zunächst nur auf den Ursprung, d.h. den Punkt mit $r = 0$. Es gilt:

$$r = 0 \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{a}{b}.$$

Die letzte Gleichung hat aber nur dann eine Lösung φ , wenn $|a| \leq |b|$, d.h. für $|a| > |b|$ ist der Ursprung kein Punkt der Kurve (wie man auch im Bild erkennen kann).

Möchten wir nun die algebraische Gleichung bestimmen, die die Punkte der Pascalschen Schnecken erfüllen, so nehmen wir an, ein Punkt der Kurve mit den Polarkoordinaten (r, φ) habe kartesische Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist offenbar $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Dies liefert:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a + b \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

durch Einsetzen in die Polargleichung von oben. Nach Umstellen erhalten wir schließlich die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - bx = a \sqrt{x^2 + y^2} \text{ bzw. } (x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Bei diesen Rechnungen müssen wir an mehreren Stellen aufpassen, wenn wir wissen möchten, dass die polynomielle Gleichung am Ende die gleiche Kurve beschreibt wie die Polargleichung oben. Erstens haben wir im letzten Schritt die Gleichung quadriert, wodurch vielleicht Punkte hinzugekommen sein könnten (das ist aber nicht der Fall, wie man nachprüfen kann); zweitens haben wir oben durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ geteilt, was für $(x, y) = (0, 0)$ aber 0 wird. Da diese Operation aber nicht erlaubt ist, hätten wir immer den Punkt $(0, 0)$ gesondert betrachten und am Ende überprüfen müssen, ob die polynomielle Gleichung auch für ihn gilt.

Und hier ergibt sich tatsächlich ein Problem. Der Punkt $(0, 0)$ erfüllt nämlich für alle a, b die polynomielle Gleichung, doch, wie wir oben gesehen haben, liegt er für $|a| > |b|$ nicht auf der Pascalschen Schnecke $S_{a,b}$. Die Menge der Punkte, die durch die Polargleichung beschrieben wird, unterscheidet sich also mindestens an dieser Stelle von der Menge, die durch die polynomielle Gleichung beschrieben wird.

Die Aussage, dass Ortskurven von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal immer reelle algebraische Kurven sind, scheint also nicht ganz zu stimmen. Vielmehr gibt es nur immer eine algebraische Kurve, die alle Punkte der Ortskurve enthält; manchmal (wie beim obigen Beispiel) kann es aber sein, dass endlich viele Punkte der algebraischen Kurve nicht Teil der Ortskurve sind. Auf diese Problematik können wir hier leider nicht weiter eingehen; wir müssen uns mit dem obigen Beispiel begnügen.

6.2 Eine rational parametrisierbare Kurve

Wir haben bereits im Abschnitt 2.5.3 gesehen, dass Kegelschnitte im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ parametrisierbar sind. Da die Ortskurven aber natürlicher Weise zunächst meist affine Objekte sind, möchten wir Parametrisierungen auch hierfür verstehen.

Wir betrachten hier zunächst nur das Beispiel des Einheitskreises $k: x^2 + y^2 = 1$. Dieser kann durch stereographische Projektion parametrisiert werden (Abb. 6.3): Die Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol $N = (0, 1)$ des Kreises und einen beliebigen anderen Punkt des Kreises, P , mit der x -Achse sind alle verschieden für verschiedene P . Umgekehrt erhält man für jeden Punkt t auf der x -Achse einen eindeutigen Schnittpunkt $P(t)$ mit dem Einheitskreis. Dessen Koordinaten lassen sich leicht berechnen:

$$P(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right).$$

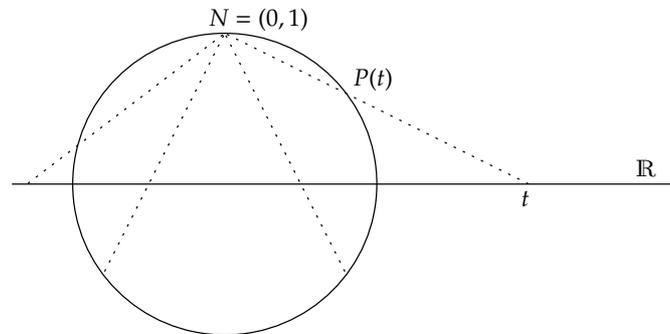


Abbildung 6.3. Der Kreis kann mit Hilfe der Stereographischen Projektion parametrisiert werden.

Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto P(t)$ ist also eine Parametrisierung von $k \setminus \{(0,1)\}$. Nimmt man den unendlich fernen Punkt auf der x -Achse hinzu, so erhält man eine Parametrisierung des ganzen Kreises.

Kurven von höherem Grad sind meist nicht parametrisierbar. Wir werden aber sehen, dass eine Parametrisierung existiert, wenn die Kurve genügend Singularitäten besitzt. Bevor wir das verstehen können, müssen wir aber zunächst eine genaue Definition und einige Eigenschaften von Singularitäten bereitstellen.

6.3 Tangenten und Singularitäten algebraischer Kurven

Wir werden sehen, dass Singularitäten und Tangenten eng verknüpft sind.

Beispiel 6.1. Wir betrachten zunächst Kurven der Form $y = f(x)$, d.h. Graphen von Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, wobei f ein univariates Polynom ist. Offenbar hat die Tangente t im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die Steigung $f'(x_0)$ und, falls $f'(x_0) \neq 0$, y -Achsen-Abschnitt $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, wegen $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$.

Betrachten wir diesen Graphen als algebraische Kurve mit Gleichung $g: y - f(x) = 0$, so gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 - f'(x) = -f'(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1 - 0 = 1.$$

Die Tangente t hat also die Gleichung:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \cdot y = b.$$

Dies ist nicht verwunderlich, da bekannterweise der Gradient $(\frac{\partial g}{\partial x}(p_x, p_y), \frac{\partial g}{\partial y}(p_x, p_y))$ senkrecht auf der Kurve im Punkt $p = (p_x, p_y)$ steht. \square

Analog ist die **Tangente** an eine beliebige algebraische Kurve f in einem Punkt p definiert durch

$$T_p(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot y = c \right\},$$

wobei c so gewählt ist, dass $p \in T_p f$, und wobei

$$\text{grad}_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0),$$

da sonst $c = 0$ folgt und $T_f(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 = 0\}$ keine Gerade, sondern die ganze Ebene beschreibt. Dies legt die folgende Definition nahe:

Definition 6.2. Ist $f(x, y) = 0 \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve, wobei f keine mehrfachen Faktoren enthält, so heißt f **glatt in** p ($p \in f$), wenn

$$\text{grad}_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq (0, 0).$$

Ist f nicht glatt in p , so heißt f **singulär in** p und p heißt **singulärer Punkt** oder **Singularität** von f . f heißt **singulär**, falls f eine Singularität besitzt, ansonsten heißt f **glatt**. Die Tangente $T_p(f)$ von oben ist also in glatten Punkten definiert.

- Beispiel 6.3.**
1. Ein Graph $y - f(x) = 0$, f univariates Polynom, ist glatt, da die partielle Ableitung nach y immer $1 \neq 0$ ist.
 2. Ein Kegelschnitt $K \subset \mathbb{C}^2$ ist genau dann singulär, wenn K Produkt zweier Geraden ist; reelle singuläre Kegelschnitte sind also Einsiedlerpunkte (der Form $x^2 + y^2 = 0$) und Produkte zweier reeller Geraden (der Form $x^2 - y^2 = 0$).
 3. Die Konchoide in Abschnitt 4.2.1 mit Gleichung $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = K^2 x^2$ hat offenbar eine Singularität in $(0, 0)$, da die Gleichung keinen Term vom Grad kleiner 2 enthält.

\square

In glatten Punkten ist die Tangente, wie bei Graphen, die beste lineare Annäherung an die Kurve. Mit dem Begriff der Multiplizität aus Definition 2.36 ist eine Gerade mit Punkten $(x(t), y(t))$ genau dann eine Tangente in einem Punkt $p = (x(t_0), y(t_0))$ einer algebraischen Kurve mit Gleichung $f(x, y) = 0$, wenn die Tangente mit der Kurve in p einen doppelten Schnittpunkt hat, d.h. wenn das univariate Polynom $f(t) := f(x(t), y(t))$ eine doppelte Nullstelle in t_0 hat.

Bemerkung 6.4. Eine algebraische Kurve $f \subset \mathbb{C}^2$ vom Grad d , wobei f keinen mehrfachen Faktor hat, besitzt höchstens $d \cdot (d - 1)$ Singularitäten (diese Schranke ist nicht die bestmögliche, wir können das hier aber nicht beweisen). Die Singularitäten von f sind nämlich die Schnittpunkte von f mit den Kurven $\partial f / \partial x$ und $\partial f / \partial y$, die jeweils höchstens vom Grad $d - 1$ sind und dies sind nach dem Satz von Bézout (siehe Abschnitt 2.5.3) höchstens $d(d - 1)$ Schnittpunkte. Details hierzu siehe [Fis94, Abschnitt 3.2].

6.4 Erste Eigenschaften singulärer Punkte

6.4.1 Die Ordnung eines Punktes

Wie können wir verschiedene Singularitäten unterscheiden? Als ersten Schritt betrachten wir hierzu singuläre Punkte von Polynomen $p(x)$ in einer Variablen x . Analog zum Fall der ebenen Kurven heißt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ singulär, wenn er erstens $p(x_0) = 0$ erfüllt und zweitens alle (hier nur eine) partiellen Ableitungen im Punkt verschwinden, also $p'(x_0) = 0$ gilt. Beispielsweise ist also $x_0 = a$ eine Singularität von

$$p = (x - a)^2 \cdot (x - b) \cdot (x - c), \quad a \neq b, a \neq c.$$

Die Taylorentwicklung von p um a beginnt mit:

$$p(x) = \frac{1}{2!} p^{(2)}(a)(x - a)^2 + \dots (x - a)^3 + \dots,$$

wobei $p^{(k)}$ wie üblich die k -te Ableitung von p bezeichnet.

Für

$$q = (x - a)^5 \cdot (x - b) \cdot (x - c), \quad a \neq b, a \neq c$$

beginnt die Taylorentwicklung um die 5-fache Nullstelle a sogar erst mit $k \cdot (x - a)^5$ für eine Konstante k . Eine Möglichkeit, Singularitäten zu unterscheiden, ist es also, dies mit Hilfe ihrer Vielfachheit als Nullstelle des Polynoms zu erledigen. Diese Zahl ist auch gleich dem Exponenten des Termes vom niedrigsten Grad in der Taylorentwicklung des Polynoms um die Singularität, weil die ersten Terme wegen der verschwindenden Ableitungen sämtlich verschwinden.

Es ist nun naheliegend, auch zur Unterscheidung von Kurven-Singularitäten zu untersuchen, welche Ableitungen verschwinden. Wir werden allerdings sehen, dass dies nur eine grobe Klassifikation liefert.

Die Taylorentwicklung in einem Punkt $p = (p_x, p_y)$ ergibt sich durch Ersetzen von x durch $p_x + (x - p_x)$ etc.:

$$f(x, y) = \sum_k f_{(k)} := \sum_k \left(\sum_{\mu+\nu=k} \frac{1}{\mu! \nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}(p) \cdot (x - p_x)^\mu \cdot (y - p_y)^\nu \right).$$

Die **Ordnung von f in p** ist dann:

$$\text{ord}_p(f) := \min\{k \mid f_{(k)} \neq 0\}.$$

Ein Punkt von Ordnung k heißt auch **k -facher Punkt** der Kurve. Ein Punkt einer Ortskurve, der k Mal durchlaufen wird, ist ein solcher k -facher Punkt. Offenbar ist ein 0-facher Punkt ein Punkt, der nicht auf der Kurve liegt.

Beispiel 6.5. Wir betrachten die Ordnung einer speziellen Kurve f im Ursprung $(0, 0)$, nämlich jener mit definierendem Polynom $f = x^2 + y^2 + ax + b$:

1. $f(0, 0) \neq 0 \iff b \neq 0 \iff \text{ord}_{(0,0)}(f) = 0$.
2. $f(0, 0) = 0 \iff b = 0 \iff \text{ord}_{(0,0)}(f) > 0$.
3. f ist glatt in $(0, 0) \iff b = 0, a \neq 0 \iff \text{ord}_{(0,0)}(f) = 1$.
4. f ist singulär in $(0, 0) \iff b = 0, a = 0 \iff \text{ord}_{(0,0)}(f) > 1$.

□

Offenbar gilt dies auch allgemeiner:

Bemerkung 6.6. 1. $0 \leq \text{ord}_p(f) \leq \deg f$.

2. $p \in f \iff f(p) = 0 \iff \text{ord}_p(f) > 0$.
3. f ist glatt in $p \iff \text{ord}_p(f) = 1$.
4. f ist singulär in $p \iff \text{ord}_p(f) > 1$.

Beispiel 6.7. Wir betrachten nun den Ursprung $(0, 0)$ als singulären Punkt verschiedener ebener Kurven und seine jeweilige Ordnung. Der angegebene Name beschreibt in den ersten vier Fällen nur die Singularität, in den letzten drei Fällen die ganze Kurve (siehe dazu Abb. 6.4).

1. Gewöhnlicher Doppelpunkt: $x^2 - y^2$, Ordnung 2.
2. Gewöhnlicher Einsiedlerpunkt: $x^2 + y^2$, Ordnung 2.
3. Gewöhnliche Spitze: $x^2 + y^3$, Ordnung 2.
4. Gewöhnlicher Vierfachpunkt: $xy(x^2 - y^2)$, Ordnung 4.
5. Dreiblättriges Kleeblatt: $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$, Ordnung 3.
6. Vierblättriges Kleeblatt: $(x^2 + y^2)^3 - x^2y^2$, Ordnung 4.
7. Ovoid: $(x^2 + y^2)^2 - x^3$, Ordnung 3. Dies ist ein Beispiel, in dem wir nur vom reellen Bild der Kurve zunächst meinen könnten, dass sie keine Singularität enthält.

□

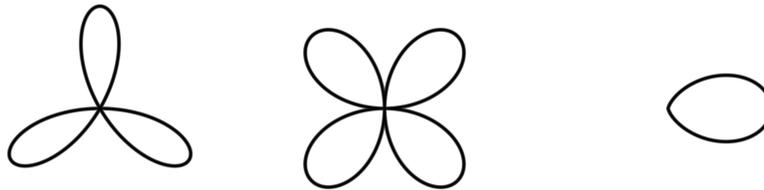


Abbildung 6.4. Einige Kurven, die jeweils eine Singularität der Ordnung 3, 4 bzw. 3 besitzen: das Drei- und Vierblättrige Kleeblatt sowie das Ovoid.

6.4.2 Einige wichtige Typen von Singularitäten

13. Vorl. — 29. Jan. '08
Einige wichtige Typen
von Singularitäten

Das Beispiel des vorigen Abschnittes zeigt, dass wir mit Hilfe der Ordnung nicht alle verschiedenen Typen¹ von singulären Punkten voneinander unterscheiden können, da z.B. sowohl das dreiblättrige Kleeblatt als auch das Ovoid Singularitäten der Ordnung 3 haben, obwohl sie sehr unterschiedlich aussehen. Die Ordnung liefert also nur eine grobe Klassifizierung von Singularitäten. Um eine wesentlich genauere Unterscheidung vornehmen zu können, müsste man eine ganze Vorlesung über Singularitätentheorie halten. Wir geben hier daher nur einige wenige Spezialfälle an, die bei Ortskurven besonders häufig auftreten.

Tangenten in singulären Punkten

Bevor wir verschiedene Typen von Singularitäten betrachten können, müssen wir singuläre Punkte ein wenig besser verstehen. Dazu möchten wir Tangenten auch in singulären Punkten definieren. Anschaulich sollte klar sein, dass die Kurve $xy = 0$ zwei verschiedene Tangenten im Ursprung haben sollte, die Kurve $y^2 - x^3 = 0$ dagegen nur eine, nämlich $y = 0$.

Etwas formaler können wir dies fassen, indem wir Schnitte von Kurven mit Geraden untersuchen: Wir betrachten eine Kurve C , die Nullstellenmenge eines Polynomes $f(x, y)$ ohne mehrfachen Faktor ist, in der Nähe des Ursprungs O . Mit $r = \text{ord}_O(f)$ und $n = \deg f$ gilt: $f(x, y) = \sum_{k=r}^n f_{(k)}(x, y)$. Für eine Gerade L , die durch $\varphi(t) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t)$ parametrisiert ist, folgt:

$$g(t) := f(\varphi(t)) = \sum_{k=r}^n f_{(k)}(\lambda_1, \lambda_2) t^k.$$

¹Was genau ein Typ einer Singularität sein soll, erklären wir hier nicht. Es gibt viele Möglichkeiten, das exakt zu formulieren (s. z.B. [Dim87]), doch das würde uns hier zu weit führen.

Die **Schnittmultiplizität** von C und L ist dann definiert als

$$\text{mult}_O(C \cap L) = \text{ord}_0(g),$$

die Vielfachheit der Nullstelle 0 von g . Diese ist nach den obigen Vorbemerkungen wenigstens r und größer als r genau dann, wenn $f_{(r)}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$.

Beispiel 6.8. 1. C sei definiert durch $f = xy(x^2 - y^2)$ (dies sind vier Geraden, die sich im Ursprung treffen), L sei parametrisiert durch $\varphi(t) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t)$. Für welche λ_1, λ_2 ist $\text{mult}_O(C \cap L) = \text{ord}_O(f) = 4$? Offenbar ist $g(t) := f(\varphi(t)) = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) t^4$. Die Vielfachheit der Nullstelle 0 von g ist 4 genau dann, wenn $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ und $\lambda_1 \neq \pm \lambda_2$. Dies ist genau das, was man anschaulich erwartet: außer den vier Geraden von C hat jede Gerade mit C in O einen 4-fachen Schnittpunkt.

2. C sei definiert durch $f = y^2 - x^3$ (im Ursprung eine gewöhnliche Spitze). Wieder untersuchen wir, welche Geraden L durch den Ursprung mit der Kurve f einen mehr als 2-fachen Schnittpunkt haben. Es gilt: $g(t) := f(\varphi(t)) = \lambda_2^2 t^2 - \lambda_1^3 t^3$. Die Nullstelle 0 von t ist genau dann mehr als 2-fach (und dann 3-fach), wenn $\lambda_2 = 0$. Die Gerade mit Parametrisierung $\varphi(t) = (\lambda_1 t, 0)$ ist aber die x -Achse, also die Gerade $y = 0$. Dies ist wieder das, was man anschaulich erwartet: nur die Gerade, die man naheliegenderweise als Tangente im Ursprung bezeichnen würde, schneidet die Kurve im Ursprung in mehr als einem 2-fachen Punkt.

□

Allgemeiner haben unsere Überlegungen von oben gezeigt (da wir jeden singulären Punkt in den Ursprung verschieben können):

Proposition 6.9. *Ist $C \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve und L eine Gerade durch einen Punkt $p \in C$, so ist $\text{ord}_p(C) \leq \text{mult}_p(C \cap L)$. Für höchstens $\text{ord}_p(C)$ Geraden durch p ist dies eine echte Ungleichung.*

Nun können wir Tangenten in singulären Punkten definieren:

Definition 6.10. *Ist eine Gerade $g \subset C$, so setzen wir $\text{mult}_p(C \cap g) = \infty$ für $p \in g$. Ist L eine Gerade und $p \in C \cap L$, so heißt L **Tangente** an C in p , falls $\text{mult}_p(C \cap L) > \text{ord}_p(C)$.*

Dies entspricht, wie wir oben an den Beispielen gesehen haben, der Anschauung. Außerdem stimmt dies mit der Definition einer Tangente in einem glatten Punkt überein: dies ist nämlich eine Gerade, die wenigstens einen 2-fachen Schnittpunkt mit der Kurve hat.

Gewöhnliche Mehrfachpunkte

Wir haben gerade Tangenten in singulären Punkten definiert. Ein gewöhnlicher k -fach-Punkt p ist nun eine Singularität in der die maximal mögliche Anzahl verschiedener Tangenten in p gibt:

Definition 6.11. Ein Punkt p einer Kurve C mit Gleichung f heißt **gewöhnlicher k -fach-Punkt**, falls p ein k -facher Punkt ist, für den gilt, dass der homogene Anteil $f_{(k)}$ vom Grad k in k verschiedene Geraden faktorisiert (über den komplexen Zahlen!), dass C also $\text{ord}_p(C)$ verschiedene Tangenten in p hat.

In einer kleinen Umgebung sieht ein gewöhnlicher k -fach-Punkt also aus wie k Geraden (die allerdings auch komplex sein können).

Beispiel 6.12. Der Ursprung ist beispielsweise ein gewöhnlicher k -fach-Punkt für folgende Kurven f :

1. $f = x^2 - y^2$ liefert einen gewöhnlichen Doppelpunkt (2-fach-Punkt), da $f = (x - y)(x + y)$.
2. $f = x^2 + y^2$ liefert auch einen gewöhnlichen Doppelpunkt, da $f = (x - iy)(x + iy)$ mit $i^2 = -1$.
3. $f = x^3y - xy^3$ liefert einen gewöhnlichen Vierfachpunkt, da $f = xy(x - y)(x + y)$.
4. $f = x^3y - xy^3 - (x^2 + y^2)^3$ liefert ebenso einen gewöhnlichen Vierfachpunkt.



Abbildung 6.5. Einige Kurven mit gewöhnlichen Mehrfachpunkten: $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3y - xy^3 - (x^2 + y^2)^3$.

Folgende Kurven haben im Ursprung eine nicht-gewöhnliche Singularität:

1. $f = x^2 - y^3$, da $f_{(2)} = x^2$ keine Produkt verschiedener Geraden ist.
2. $f = x^2 - y^{20}$, aus den gleichen Grund.
3. $(x^2 + y^2)^3 - x^2y^2$, da $f_{(4)} = -x^2y^2$ ein Produkt von zwei doppelten Geraden $x^2 = 0$ und $y^2 = 0$ ist.

□

Gewöhnliche Spitzen

Neben den gewöhnlichen Doppelpunkten, die wir bereits mehrfach bei Ortskurven gesehen haben, tauchen auch gewöhnliche Spitzen häufig auf, beispielsweise im Fall $a = b$ bei der Pascalschen Schnecke (Abb. 6.2, Mitte) oder $a = K$ bei der Konchoide (Abb. 4.4, links). In beiden Beispielen entsteht die Spitze durch das Zusammenziehen einer Schlaufe durch das Verändern des Parameters a der Kurvenfamilien: der gewöhnliche Doppelpunkt wird dabei für einen speziellen Wert von a zur Spitze.

Wie können wir nachrechnen, ob eine Singularität eine gewöhnliche Spitze ist? Dazu müssen wir zunächst klären, was genau eine gewöhnliche Spitze sein soll. Am Besten erläutert dies ein Beispiel:

Beispiel 6.13. Wir betrachten die ebene algebraische Kurve mit definierendem Polynom (Abb. 6.6, linkes Bild): $f = y^2 - x^3 + x^5$, die offenbar eine Singularität beschreibt, die wie eine gewöhnliche Spitze mit Gleichung $g: y^2 - x^3 = 0$ aussieht (mittleres Bild).

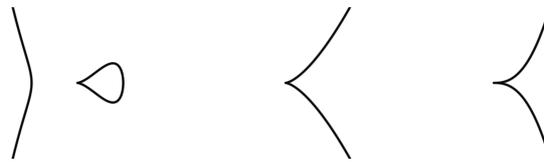


Abbildung 6.6. Die linken beiden Bilder zeigen Kurven mit gewöhnlichen Spitzen im Ursprung, die linke Kurve hat die Gleichung $f: y^2 - x^3 + x^5 = 0$, die mittlere die Gleichung $g: y^2 - x^3 = 0$. Das rechte Bild zeigt ebenfalls eine Spitze, aber keine gewöhnliche Spitze, die Kurve hat Gleichung $h: y^2 - x^5 = 0$.

Was sind gemeinsame Eigenschaften der beiden Kurven in der Nähe des singulären Punktes $O = (0, 0)$ und was unterscheidet sie von der Singularität in O der Kurve $h = y^2 - x^5$? Offenbar haben alle Kurven in O die gleiche Ordnung: $\text{ord}_O(f) = \text{ord}_O(g) = \text{ord}_O(h) = 2$. Außerdem haben alle Kurven, da $f_{(2)} = y^2$ in allen Fällen ist, jeweils die doppelt zählende Gerade $l: y = 0$ als eindeutige Tangente.

Doch es gibt auch einen essentiellen Unterschied zwischen der Singularität von h und den anderen beiden Kurven: Für die Gerade $L = \{y = 0\}$, parametrisiert durch $l(t) = (t, 0)$ gilt: $\text{mult}(h \cap L) = 5$, $\text{mult}(f \cap L) = 3 = \text{mult}(g \cap L)$:

$$\begin{aligned} f(l(t)) &= 0 - t^3 + t^5 = -t^3(1 - t^2), \\ g(l(t)) &= 0 - t^3 = -t^3, \\ h(l(t)) &= 0 - t^5 = -t^5. \end{aligned}$$

Analog hat $A_k: y^2 - x^k$ mit der Tangenten $y = 0$ die Schrittmultiplizität k . \square

Definition 6.14. Eine *gewöhnliche Spitze* einer ebenen algebraischen Kurve f ist eine Singularität p von f mit Ordnung $\text{ord}_p(f) = 2$, $f_{(2)} = k \cdot L^2$ für eine gewisse Gerade L mit $\text{mult}_p(f \cap L) = 3$.

6.5 Parametrisierbarkeit algebraischer Kurven

Wir haben bereits gesehen, dass Kegelschnitte und insbesondere Kreise parametrisierbar sind. Die meisten ebenen algebraischen Kurven sind aber nicht parametrisierbar; schon für Grad 3 sind nur singuläre Kurven parametrisierbar. Ein lesbarer Beweis, dass die Kurve mit Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\lambda \neq 0, 1$, nicht parametrisierbar ist, steht in dem sehr netten Buch [Rei88] ab Seite 28.

Hat eine Kurve aber genügend viele Singularitäten oder eine Singularität mit hoher Ordnung, so ist sie parametrisierbar. Ein erstes solches Resultat können wir beweisen, indem wir die Idee der Stereographischen Projektion, die wir zur Parametrisierung des Kreises verwendet haben, auf Kurven vom Grad d mit einem $(d-1)$ -fachen Punkt übertragen: Die wesentliche Eigenschaft des Kreises, die wir dabei verwendet hatten, ist jene, dass eine Gerade durch den Nordpol den Kreis in genau einem weiteren Punkt trifft.

Da die projektive Ebene für die folgenden Betrachtungen die natürliche Arbeitsumgebung ist, müssen wir noch klären, wie die obigen Begriffe dort definiert werden können. Das ist aber nicht schwierig, da jeder Punkt — und damit auch eine ganze Umgebung um diesen Punkt — in einer gewissen affinen Karte (z.B. $x = 1$, $y = 1$ oder $z = 1$) sichtbar ist und wir dort einfach die Definitionen von oben verwenden können, die nämlich sämtlich nur lokale Begriffe sind.

Nur für das gleichzeitige Betrachten aller singulären Punkte eine projektiven Kurve F mag es hilfreich sein, die lokale Bedingung $f(p) = 0$, $\text{grad}_p(f) = (0, 0)$ für eine Singularität einer affinen Kurve f auch projektiv zu fassen: $F(p) = 0$, $\text{grad}_p(F) = (0, 0, 0)$. Hierbei ist es häufig nützlich, die folgende **Formel von Euler** zu verwenden, die man direkt durch Nachrechnen verifizieren kann:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = \text{deg}(F) \cdot F.$$

Diese Formel besagt nämlich, dass wir projektiv auch nur drei Bedingungen nachprüfen müssen, um zu klären, ob ein Punkt singulär ist.

Proposition 6.15. $F \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definiere eine projektive algebraische Kurve C , wobei F keine mehrfachen Faktoren enthalte. Dann gilt für $p \in C$:

1. p ist glatt in C genau dann, wenn

$$\text{grad}_p(C) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

2. Ist C glatt in p , so ist die projektive Tangente $T_p(C)$ in p gegeben durch die lineare Gleichung

$$x \frac{\partial F}{\partial x}(p) + y \frac{\partial F}{\partial y}(p) + z \frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0.$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen und die Formel von Euler benutzen, für die Tangente zusätzlich die Gleichung der affinen Tangente verwenden. \square

Definition 6.16. Eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, \mathbb{K} ein Körper, definiert durch ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x, y]$ heißt **irreduzibel**, wenn das Polynom f irreduzibel über \mathbb{K} ist, d.h. wenn aus $f = g \cdot h$ schon $g \in \mathbb{K}$ oder $h \in \mathbb{K}$ folgt.

Bevor wir für einen Spezialfall explizit eine Parametrisierung ausrechnen, geben zunächst einige Resultate ohne Beweis an, mit Hilfe derer wir für viele klassische Kurven bestimmen können, ob sie parametrisierbar sind, ohne eine Parametrisierung angeben zu müssen:

Satz 6.17 (Plückers Formel, für einen Beweis, siehe z.B. [Fis94]). Hat eine ebene irreduzible algebraische Kurve C im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ genau δ gewöhnliche Doppelpunkte, genau σ gewöhnliche Spitzen und sonst keine Singularitäten, so gilt:

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta - \sigma,$$

wobei $g(C)$ das sogenannte **Geschlecht** der Kurve bezeichnet.

Für einen knappen Überblick über das Geschlecht, siehe S. 43ff in [Rei88]; für ein tieferes Verständnis benötigt man mehr Hintergrund aus der algebraischen Topologie und der algebraischen Geometrie. Wenigstens die Aussage eines der wichtigsten diesbezüglichen Resultate können wir verstehen und benutzen:

Satz 6.18. Eine ebene irreduzible Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ist genau dann parametrisierbar, wenn sie Geschlecht $g(C) = 0$ hat.

Wie schon erwähnt, können wir mit Hilfe der beiden Sätze für viele klassische Kurven bestimmen, ob sie parametrisierbar sind. Im Gegensatz zu den Monoiden weiter oben ist dies hier aber nur eine rein abstrakte Aussage, ohne dass wir die Parametrisierung zunächst explizit finden könnten. Dafür benötigen wir andere Strategien (beispielsweise aus der Computeralgebra), die wir hier aber nicht ausführen können.

Beispiel 6.19. 1. Die dreispitzige Hypozykloide $3(x^2 + y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 6(x^2 + y^2) = 1$ ist parametrisierbar.

2. Eine ebene irreduzible Kurve C vom Grad d hat höchstens $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ Singularitäten, da $g(C) \geq 0$ für jede Kurve C .

□

14. Vorl. — 06. Feb. '08
 Parametris. von Monoiden; Randomisiertes Beweisen

Satz/Definition 6.20. Eine irreduzible ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vom Grad d mit einem $(d-1)$ -fachen Punkt, die keine Gerade enthält, ist parametrisierbar. Eine solche Kurve heißt **Monoid**.

Beweis. Wir können annehmen, dass der $(d-1)$ -fache Punkt der Punkt $O = (0 : 0 : 1)$ ist. Das definierende Polynom von C sei $F(x, y, z)$. Dann ist $f(x, y) := F(x, y, 1) = f_{(n-1)} + f_{(n)}$. Die Gerade durch O mit Parametrisierung $\varphi(t) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t)$ hat mit C , wie wir wissen, wenigstens den $(d-1)$ -fachen Schnittpunkt O . Genauer ergeben sich mit C Schnittpunkte für:

$$0 = f_{(n-1)}(\lambda_1 t, \lambda_2 t) + f_{(n)}(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = t^{n-1}(f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2) + t f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)).$$

Die Kurve C enthält keine Gerade, also gibt es nach dem Satz von Bézout genau noch einen n -ten Schnittpunkt von C und L und dieser ergibt sich für $t = -\frac{f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2)}{f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)}$. Insbesondere haben $f_{(n-1)}$ und $f_{(n)}$ also keine gemeinsame Nullstelle. Setzen wir nun dieses t in die Gerade, parametrisiert durch $(\lambda_1 t, \lambda_2 t)$, ein, so erhalten wir die Punkte

$$\left(-\lambda_1 \frac{f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2)}{f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)}, -\lambda_2 \frac{f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2)}{f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)}\right),$$

die alle auf der affinen Kurve $f(x, y) = 0$ liegen; dies ist natürlich nur definiert, falls $f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$. Die projektive Kurve C , parametrisiert durch:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow C, (\lambda_1 : \lambda_2) \mapsto \left(-\lambda_1 f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2) : -\lambda_2 f_{(n-1)}(\lambda_1, \lambda_2) : f_{(n)}(\lambda_1, \lambda_2)\right),$$

ist dagegen immer definiert, da $f_{(n-1)}$ und $f_{(n)}$ keine gemeinsame Nullstelle haben. □

Beispiel 6.21. 1. Jede irreduzible singuläre Kubik $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ist parametrisierbar, da jede Singularität wenigstens Ordnung 2 und da die Kurve Grad 3 hat.

2. Das dreiblättrige Kleeblatt, $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2 y - y^3 = 0$, ist parametrisierbar, da die Singularität im Ursprung Ordnung 3 und die Kurve Grad 4 hat. War Ihnen beim Betrachten des dreiblättrigen Kleeblattes aufgefallen, dass Geraden durch den Ursprung die Kurve nur noch in einem weiteren Punkt trifft?

□

Der Beweis des Satzes gibt auch an, wie man eine solche Parametrisierung explizit finden kann. Eine gute Übung ist es, die Parametrisierung des dreiblättrigen Kleeblattes tatsächlich zu berechnen.

Die Anwendungsmöglichkeiten des obigen Verfahrens zur Parametrisierung sind allerdings gering, da nicht viele Kurven Punkte so hoher Ordnung haben. Singuläre Kurven von kleinem Grad sind aber recht häufig Monoide, ein Beispiel sind irreduzible singuläre Kurven von Grad 3:

Beispiel 6.22. $F = y^2z - x^3$. Mit $f = F(x, y, 1)$ ergibt sich $f_{(2)} = y^2$, $f_{(3)} = -x^3$. Nach dem Beweis des obigen Satzes 6.20 zur Parametrisierung von Monoiden ist daher

$$(\lambda_1 : \lambda_2) \mapsto (-\lambda_1(\lambda_2)^2 : -\lambda_2(\lambda_2)^2 : -(\lambda_1)^3)$$

eine Parametrisierung der durch F definierten projektiven Kurve. Zur Überprüfung können wir dies in F einsetzen:

$$(\lambda_2)^2(\lambda_2)^4(-\lambda_1)^3 - (-\lambda_1)^3(\lambda_2)^6 = 0.$$

Die Parametrisierung der affinen Kurve $f = y^2 - x^3$ können wir direkt an jener der projektiven ablesen, indem wir $\lambda_1 = -1$ setzen, damit $-(\lambda_1)^3 = 1$. Außerdem schreiben wir $t = \lambda_2$ und erhalten:

$$t \mapsto (t^2, -t^3),$$

was wir natürlich auch schon vorher wussten. Umgekehrt hätte man aus dieser Parametrisierung der affinen Kurve f die projektive Parametrisierung durch Homogenisieren erhalten können: $(s : t) \mapsto (t^2s : -t^3 : s^3)$. Diese unterscheidet sich von der obigen durch ein Vorzeichen, weil wir zwischendurch $\lambda_1 = -1$ gewählt hatten. \square

Automatisches Sätze-Erkennen und -Beweisen

Wir geben einen knappen Überblick zwei Methoden, geometrische Sätze automatisch zu beweisen. Wir beginnen mit einer Methode, die in C implementiert ist, das sogenannte randomisierte Beweisen. Anschließend gehen wir kurz auf Computeralgebra und insbesondere Gröbner-Basen ein, die noch wesentlich mehr Anwendungen als nur das Automatische Beweisen besitzt.

Zwar gibt es auch noch weitere Methoden des automatischen Beweisens, doch möchten wir es hier mit diesen beiden bewenden lassen.

7.1 Randomisiertes Beweisen

In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen der Dissertation [Kor99] von U. Kortenkamp, einem der beiden Autoren von C . Allerdings beschränken wir uns hier nur auf eine grobe Darstellung und verweisen für Details auf die zitierte Arbeit.

7.1.1 Nullstellen und Nullpolynome

Die Basis des Randomisierten Beweisens ist die einfache Beobachtung, dass ein univariates Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad d das Nullpolynom ist, falls es nur mehr als d Nullstellen hat. Wählen wir also $d + 1$ zufällige Werte $x_1, \dots, x_{d+1} \in \mathbb{C}$ und gilt $p(x_i) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, d+1$, so folgt: $p(x) = 0 \forall x$. Diesen Test können wir auch durchführen, wenn wir p gar nicht genau kennen, sondern nur eine Black Box haben, die für eine gegebenes x feststellt, ob $p(x) = 0$ ist. Wir benötigen eine Variante dieses Argumentes:

Lemma 7.1. Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein univariates Polynom vom Grad $\leq d$ und sei außerdem $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge. Wählen wir r Werte gleichmäßig zufällig verteilt aus S , so ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsabschätzung:

$$P(f(r) = 0 \mid f \neq 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

Beweis. f hat höchstens d Nullstellen, was wir durch die Anzahl der möglichen Werte von r teilen müssen. \square

Satz 7.2 (Schwarz-Zippel). Sei $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ein multivariates Polynom vom Grad d und sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge. Sind nun r_1, \dots, r_n gleichmäßig zufällig verteilte Werte aus S , so gilt folgende Wahrscheinlichkeitsabschätzung:

$$P(f(r_1, \dots, r_n) = 0 \mid f \neq 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

Beweis. Induktion nach der Anzahl der Variablen; siehe z.B. [Ran95]. \square

Damit können wir leicht ein Korollar beweisen, mit Hilfe dessen wir auch für multivariate Polynome beweisen können, dass sie bereits das Nullpolynom sind:

Korollar 7.3. Sei $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ein multivariates Polynom vom Grad $\leq d$ und sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge mit $|S| > d$. Falls $f(r_1, \dots, r_n) = 0 \forall (r_1, \dots, r_n) \in S^n$, dann folgt $f \equiv 0$.

Beweis. Nach dem Satz von Schwarz-Zippel 7.2 ist die Wahrscheinlichkeit, dass $f(r_1, \dots, r_n) = 0$ ergibt unter der Bedingung, dass $f \neq 0$, höchstens $\frac{d}{|S|} < 1$. Aber nach Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, so dass folgt: $f \equiv 0$. \square

7.1.2 Automatisches Beweisen von konstruktiven Punkt/Geraden-Sätzen

Wenn wir es schaffen, eine geometrische Behauptung in eine Behauptung umzuformulieren, dass ein gewisses Polynom das Nullpolynom ist, so haben wir im vorigen Abschnitt eine Möglichkeit gefunden, tatsächlich automatisch zu beweisen, dass diese Behauptung wahr ist.

In Aufgabe 19 hatten wir gesehen, dass wir mit Hilfe des Kreuzproduktes sowohl die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte als auch den Schnitt zweier Geraden berechnen können. Das Skalarprodukt zwischen einem Punkt und einer Geraden wiederum verschwindet genau dann, wenn der Punkt auf ihr liegt.

Wie wir dies ausnutzen können, um Sätze über Punkte und Geraden beweisen zu können, zeigt das folgende triviale Beispiel:

Beispiel 7.4. Sei $P = (a : b : c)$, $Q = (d : e : f)$ und $l = PQ$ die Gerade durch die beiden Punkte. Wir möchten durch Randomisiertes Beweisen nochmals zeigen, dass P tatsächlich auf l liegt.

Die Gerade $l = (g : h : i)$ wird gegeben durch die projektiven Koordinaten zu $P \times Q$, d.h. $g = bf - ce$, $h = cd - af$, $i = ae - be$. Der Punkt P liegt auf l , falls $j = (a, b, c) \cdot (g, h, i) = 0$. Ist dieses Polynom das Nullpolynom, so liegt $P = (a : b : c)$ für beliebige Werte für a, b, c, d, e, f immer auf der Geraden PQ .

Wir können j explizit ausschreiben:

$$j = a \cdot (bf - ce) + b \cdot (cd - af) + c \cdot (ae - bd).$$

j hat also Grad 3. Wählen wir also $S = \{0, 1, 2, 3\}$, so ist, wie im Korollar 7.3 gefordert, $|S| > 3 = d$. Einsetzen aller möglichen Punkte aus S^6 zeigt, dass tatsächlich $j \equiv 0$. Wir rechnen hier nur einen Punkt nach:

$$j(0, 1, 2, 3, 0, 1) = 0 + 1 \cdot (6 - 0) + 2 \cdot (0 - 3) = 0.$$

Natürlich können wir hier in diesem einfachen Fall auch direkt j ausrechnen und finden $j \equiv 0$. In komplizierteren Fällen mag das symbolische Nachrechnen aber zu zeitaufwendig sein. \square

Eigentlich hätten wir im Beispiel natürlich $4^6 = 2^{12} = 4096$ Polynomauswertungen durchführen müssen. Für kompliziertere Konstruktionen können dies leicht zu viele Auswertungen sein, um praktikabel in Software zum Beweisen von Aussagen eingesetzt zu werden. In der Praxis reicht es aber oft aus, keinen Beweis, sondern nur eine Aussage zu haben, die mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit korrekt ist. Wählen wir im Beispiel die Koordinaten der Punkte zufällig im Bereich $[-10^6, 10^6]$, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Nichtzutreffen der Aussage schon $\leq \frac{3}{2} \cdot 10^{-6}$ nach Einsetzen von nur einem einzigen zufällig gewählten Punktepaar P, Q . Wiederholen wir das Experiment ein paar Mal, so wird diese Wahrscheinlichkeit schnell sehr klein. In der Praxis wird dies meist wohl ausreichen.

Möchten wir diese Technik für andere Punkte-/Geraden-Konstruktionen einsetzen, so müssen wir, um das Korollar verwenden zu können, den Grad des Polynomes abschätzen, das die Behauptung beschreibt. Da Kreuzprodukt und Skalarprodukt aber explizit gegeben sind, ist diese Abschätzung nicht schwer. Details stehen in [Kor99].

Eine wesentliche Verbesserung der Methode liefert ein Lemma, mit Hilfe dessen man die Anzahl der nötigen Überprüfungen drastisch reduzieren kann, wenn man nicht nur eine obere Schranke für den Grad des multivariaten Polynomes, sondern genauer für jeden Grad d_i in der i -ten Variablen eine obere Schranke kennt:

Lemma 7.5. Sei $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ein multivariates Polynom vom Grad höchstens d_i in x_i . Seien außerdem $\emptyset \neq S_i \subset \mathbb{C}$ endliche Teilmengen mit $|S_i| > d_i$. Falls $f(r_1, \dots, r_n) = 0 \forall (r_1, \dots, r_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$, so folgt: $f \equiv 0$.

Beweis. Mit Induktion nach der Anzahl der Variablen. Die Details stehen in [Kor99, Lemma 5.19]. \square

Im obigen trivialen Beispiel können wir, da jede Variable in jedem Monom nur höchstens einmal vorkommt, die zu überprüfenden Punkte von $\{0, 1, 2, 3\}^6$ auf $\{0, 1\}^6$ reduzieren, d.h. von 4096 auf 64. Mit dieser Verbesserung kann man auch nicht-triviale Sätze wirklich beweisen, wie beispielsweise den Satz von Pappus. Die in [Kor99, S. 68] angegebene Konstruktion führt auf $4^{15} \approx 10^9$ zu überprüfende Punkte, was problemlos von einem Computer erledigt werden kann.

7.1.3 Bemerkungen

Abschließend möchten wir noch bemerken, dass bei der konkreten Umsetzung der obigen Methode numerische Probleme auftreten. Diese kann man umgehen, wenn man statt über \mathbb{C} über einem endlichen Körper rechnet. Dann treten selbstverständlich andere Probleme auf, die aber lösbar sind.

Die Resultate dieses Abschnittes zeigen, dass man tatsächlich, wenn man nur eine gut gewählte **Instanz** (d.h. Wahl konkreter Werte für die Koordinaten der freien Punkte etc.) einer Konstruktion wählt, die allgemein genug ist, tatsächlich schon die Korrektheit einer Konstruktion sehr wahrscheinlich ist. In der Praxis führt allerdings auch dies auf numerische Probleme: Probiert man nämlich in einem dynamischen Geometrie System ein wenig herum und sieht, dass ein gewisser Punkt offenbar immer auf einer gewissen Geraden liegt, so kann dies einfach nur ein visueller Eindruck sein, da ja auf dem Bildschirm viele Punkte als der selbe Pixel angezeigt werden.

Wie schon im Beispiel oben erwähnt, kann man natürlich auch alle Sätze, die man durch einfaches feststellen, ob ein Polynom das Nullpolynom ist, mittels Randomisierten Beweisens nachweisen kann, auch direkt beweisen, indem man in einem Computer Algebra Programm dieses Polynom, das von vielen Variablen abhängt, einfach ausrechnet und feststellt, ob es das Nullpolynom ist. Leider ist dies in vielen Fällen aber zu langsam; obwohl es sich nur um die Berechnung kleiner Determinanten und ähnlichen handelt, sind Berechnungen mit großen Polynomen nämlich sehr zeitaufwendig.

Für das Beispiel des Satzes von Pappus dauert die nötige Berechnung auf meinem Rechner im Jahr 2007 derzeit in Maple etwa eine Sekunde, was vielleicht noch akzeptabel wäre im laufenden Betrieb. In der Praxis ist aber das Rechnen mit einer konkreten Instanz, also konkret gewählten zufälligen Werten, wesentlich schneller und, wie wir oben gesehen haben, auch für die meisten Anwendungen völlig ausreichend.

7.2 Automatisches Sätze-Erkennen

Die Ausführungen der vorigen Abschnitte machen deutlich, dass man schon durch Ausprobieren einer einzigen zufälligen Instanz einer gegebenen Konstruktion mit großer Wahrscheinlichkeit eine Aussage treffen kann.

Das kann man einsetzen, um automatisiert Behauptungen zu finden, die man dann versuchen kann zu beweisen. Möchte man beispielsweise für einen vom Benutzer ausgewählten Punkt nicht-triviale Inzidenzen erkennen, so muss man nur alle freien Punkte zufällig wählen und dann feststellen, ob der ausgewählte Punkt auf einer Geraden liegt oder mit einem Punkt übereinstimmt, von dem man es nicht schon aus der Konstruktionsbeschreibung wusste.

Wie schon in Kapitel 5 über aktuelle Dynamische Geometrie Software erwähnt, benutzt C diese Methode, um automatisiert Sätze zu erkennen. Dies wiederum benutzt das Programm, um automatisiert erkennen zu können, ob eine gestellte Konstruktions-Aufgabe korrekt gelöst wurde, auch wenn sie nicht genau so durchgeführt wurde wie vom Aufgaben-Steller vorgesehen. Ist beispielsweise der Mittelpunkt einer Strecke zu konstruieren, so kann der Schüler dies auf eine beliebige Art und Weise erledigen; C wird (zumindest im Prinzip) immer durch seine eingebauten Methoden zum automatischen Beweisen feststellen können, ob der konstruierte Punkt tatsächlich der Mittelpunkt ist.

7.3 Computeralgebra

Die in den vorigen Abschnitten verwendete Technik des automatischen Beweisens funktioniert nur in den Fällen, in denen man die behauptete Aussage durch mehrere Kreuzprodukte und ein Skalarprodukt formulieren kann. Das trifft natürlich nicht auf alle möglichen Aussagen zu, die man über Konstruktionen in dynamischen Geometrie Systemen treffen kann.

Ein wesentlich mächtigeres Hilfsmittel sind die sogenannten Gröbner-Basen, die wir nun vorstellen werden und die das wesentliche Hilfsmittel der **Computeralgebra** sind. Dazu benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen über Ideale. Wir werden sehen, dass sich die Arbeit aber lohnt. Leider können wir die Theorie nur anreißen und verweisen daher auf Literatur; sehr angenehm lesbar ist beispielsweise [CLO97], wir haben zur Vorbereitung auch das Vorlesungsskript von D. van Straten verwendet.

Allerdings müssen wir anmerken, dass auch Gröbner Basen nicht das Allheilmittel für das automatische Beweisen geometrischer Sätze sind; z.B. gibt es Sätze, die nur über den reellen Zahlen wahr sind, aber nicht über den komplexen Zahlen und solche Sätze können wir mit Hilfe von Gröbner Basen nicht beweisen.

15. Vorl. — 13. Feb. '08
Automatisches Beweisen: Computeralgebra

7.3.1 Ideale und Varietäten

Definition 7.6. Sei $A \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ eine Menge von Polynomen, \mathbb{K} ein Körper. Die Nullstellenmenge von A ist

$$V(A) := \{a \in \mathbb{K}^n \mid f(a) = 0 \forall f \in A\}.$$

Eine Menge der Form $V(A)$ heißt **affine Varietät**. Ist $A = \{f_1, \dots, f_r\}$ für gewisse $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, so schreiben wir kurz $V(f_1, \dots, f_r)$ für $V(\{f_1, \dots, f_r\})$. Entsprechend können wir für homogene Polynome **projektive Varietäten** definieren.

Bemerkung 7.7. Direkt aus der Definition folgt:

- $V(1) = \emptyset$, $V(0) = \mathbb{K}^n$ und $A \subset B \Rightarrow V(B) \subset V(A)$.
- Ist $f \in \mathbb{K}[x, y]$, so ist $V(f)$ eine ebene algebraische Kurve.

Definition 7.8. Sei $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring und $A \subset R$ eine Teilmenge. Das **Ideal**, das von A erzeugt wird, besteht aus allen endlichen Summen $r_1 f_1 + \dots + r_s f_s$, $f_i \in A$, $r_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, d.h.:

$$\langle A \rangle := \left\{ \sum_{f \in A} r_f f \mid r_f \in R, \text{ jeweils nur endlich viele } r_f \neq 0 \right\}.$$

Ist A endlich, d.h. $A = \{f_1, \dots, f_s\}$ für gewisse $f_i \in R$, so ist

$$\langle A \rangle = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \{r_1 f_1 + \dots + r_s f_s \mid r_i \in R\}.$$

Beispiel 7.9.

- R ein Ring (mit 1), dann: $\langle 1 \rangle = R$.
- R ein Ring (mit 1), $\langle 0 \rangle = \{0\}$.
- $R = \mathbb{Z}$, dann: $I := \langle a, b \rangle = \langle \text{ggT}(a, b) \rangle$. Denn: Sei o.B.d.A. $a < b$; dann: $b = c \cdot a + r$ für gewisse $c \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{Z}$ mit $|r| < |a|$ (**Division mit Rest**). Rekursiv können wir damit Tripel $T_i = (a_i, u_i, v_i)$ bestimmen, so dass $T_0 = (a, 1, 0)$, $T_1 = (b, 0, 1)$, $T_{i+1} = q_i T_i + T_{i+1}$, wobei q_i so gewählt wird, dass $0 \leq a_{i+1} < a_i$. Ist $a_{i+1} = 0$, so ist $\text{ggT}(a, b) = a_i$ und mit $u = u_i$ und $v = v_i$ gilt: $\text{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$. Diesen Algorithmus nennt man **erweiterten euklidischen Algorithmus**. Man kann ihn übrigens leicht mit Induktion beweisen, indem man zunächst für jedes i die Gleichung $a_i = u_i a + v_i b$ zeigt und dann $q_i(u_i a + v_i b) = q_i a_i$ von $u_{i-1} a + v_{i-1} b = a_{i-1}$ subtrahiert, da dann folgt: $u_{i+1} a + v_{i+1} b = a_{i+1}$. Der Algorithmus zeigt, dass $\text{ggT}(a, b) \in \langle a, b \rangle$; die Umkehrung ist klar. Beispielsweise ist $\langle 2, 5 \rangle = \langle 1 \rangle$, da $-2 \cdot 2 + 5 = 1$; also: $\langle 2, 5 \rangle = \mathbb{Z}$.
- $R = \mathbb{K}[x]$ für einen Körper \mathbb{K} . Auch in $\mathbb{K}[x]$ ist eine Division mit Rest erklärt und wir können daher genauso zeigen, dass $\langle f, g \rangle = \langle \text{ggT}(f, g) \rangle$.

□

Die Nullstellenmenge $V(A)$ hängt nur vom Ideal $\langle A \rangle$ ab:

Proposition 7.10. *Ist $A \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, so gilt:*

$$V(A) = V(\langle A \rangle).$$

Beweis. Die Inklusion $V(A) \supset V(\langle A \rangle)$ ist klar, da $A \subset \langle A \rangle$. Sei also $a \in V(A)$ und $f \in \langle A \rangle$, d.h. $f = \sum_{i=1}^s r_i f_i$ für gewisse $f_i \in A$ und $r_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Dann folgt: $f(a) = \sum_{i=1}^s r_i(a) f_i(a) = 0$, also: $a \in V(\langle A \rangle)$. □

Beispiel 7.11.

1. Für ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{K}[x, y, z]$ gilt, wie wir in den Übungen bewiesen haben, die Formel von Euler, mit der folgt:

$$f \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle, \text{ und daher: } V\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = V\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

2. $I = \langle x, y \rangle = \langle x, y, x^2y \rangle$, daher: $V(x, y) = V(x, y, x^2y)$.

□

In Zukunft müssen wir also nur noch $V(I)$ für Ideale I untersuchen, um Varietäten zu verstehen. **Hilberts Basissatz**¹, den wir gleich beweisen, sagt aus, dass sich jede Varietät durch endlich viele Polynome beschreiben lässt: $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$ für gewisse $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. In unseren Anwendungen wird dies zwar nie ein Problem sein, da wir beispielsweise Ideale studieren werden, die die Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve beschreiben. In dem Fall ist

$$I = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

sowieso endlich erzeugt.

Trotzdem benötigen wir Hilberts Basissatz, z.B. um beweisen zu können, dass die Algorithmen, die wir verwenden werden, nicht unendlich lang weiter laufen, sondern tatsächlich abbrechen. Da dieser Satz so fundamental ist, werden wir wenigstens diesen ausführlich herleiten, für einige weitere Resultate geben wir dann nur noch Beweisideen oder verweisen auf Literatur. Um dies formal erledigen zu können, führen wir den Begriff eines noetherschen Rings ein:

Definition 7.12. *Ein Ring (bei uns immer mit 1) R heißt **noethersch**², wenn jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, d.h. falls es für jedes Ideal $I \subset R$ Polynome f_1, \dots, f_s , $s \in \mathbb{N}$ gibt mit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.*

¹David Hilbert, 1862–1943

²nach Emmy Noether, 1882–1935

- Beispiel 7.13.** 1. Offenbar sind \mathbb{Z} und $\mathbb{K}[x]$ oder allgemeiner **Hauptidealringe** (siehe dazu Beispiel 7.9), d.h. Ringe, bei denen jedes Ideal bereits von einem Element erzeugt werden kann, noethersch. Insbesondere sind also euklidische Ringe noethersch, weil jeder **euklidische Ring**, d.h. ein Ring, in dem eine Division mit Rest sinnvoll durchgeführt werden kann, ein Hauptidealring ist vermöge des erweiterten euklidischen Algorithmus (siehe auch dazu Beispiel 7.9).
2. $\mathbb{K}[x, y]$ ist kein Hauptidealring, da beispielsweise das Ideal $I = \langle x, y \rangle$ nicht von einem Erzeuger aufgespannt wird. Wäre nämlich $I = \langle f \rangle$ für ein $f \in \mathbb{K}[x, y]$, so wäre insbesondere $x \in \langle f \rangle = \{f \cdot g \mid g \in \mathbb{K}[x, y]\}$, d.h. $x = f \cdot g$ für ein $g \in \mathbb{K}[x, y]$, also: $f \mid x$. Dies ist aber nur möglich, wenn $f = 1$ oder $f = x$, doch $1 \notin \langle x, y \rangle$, d.h. $f = x$. Aber es muss auch $y \in \langle f \rangle$ gelten, d.h. analog $f = y$. Beides ist aber gleichzeitig nicht möglich. Es gibt also Ideale in $\mathbb{K}[x, y]$, die nicht von einem einzigen Erzeuger aufgespannt werden, doch wir werden sehen, dass $\mathbb{K}[x, y]$ noethersch ist.

□

Um zu beweisen, dass $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ noethersch ist, benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

Proposition 7.14. *Die folgenden Aussagen über einen Ring sind äquivalent:*

1. R ist noethersch,
2. Sind I_j für $j = 1, 2, \dots$ Ideale in R mit $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, ab dem diese Kette **stationär** wird, d.h. $I_k = I_{k+1} = \dots$.
3. Ist $\emptyset \neq M$ eine Menge und $\mathcal{A} = \{I_j \mid j \in M\}$ eine Familie von Idealen in R , so hat \mathcal{A} ein maximales Element I_m mit $I_m \subset I_k \Rightarrow I_m = I_k$.

Beweis. 1 \Rightarrow 2: Die Menge $I := \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ ist ein Ideal³. Nach Voraussetzung ist $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ für gewisse f_i . Sei k so groß gewählt, dass $f_i \in I_k \forall i$, dann: $I_k = I_{k+1} = \dots$.

2 \Rightarrow 3: Wir nehmen an, es gäbe kein maximales Element in \mathcal{A} . Dann gibt es für jedes $I_1 \in \mathcal{A}$ ein $I_2 \in \mathcal{A}$ mit $I_1 \subsetneq I_2$ usw., was eine aufsteigende Kette von Idealen liefert, die nicht stationär wird.

3 \Rightarrow 2 ist trivial.

2 \Rightarrow 1: Wir nehmen an, dass das Ideal I nicht endlich erzeugt ist. Dann können wir induktiv $f_i \in I$ finden mit $f_i \notin \langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle =: I_{i-1}$. Dies liefert eine aufsteigende Kette $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$, die nicht stationär wird. □

Damit können wir schließlich den folgenden für unsere Anwendungen sehr wichtigen Satz herleiten:

³Übungsaufgabe

Satz 7.15 (Hilberts Basissatz). *Ist R noethersch, dann auch $R[x]$.*

Beweis. Wir nehmen an, $R[x]$ wäre nicht noethersch. Sei dann $I \subset R[x]$ ein nicht endlich erzeugtes Ideal. Wir wählen $f_1 \in I$ mit $\deg(f_1)$ minimal und dann induktiv $f_{i+1} \in I \setminus \langle f_1, \dots, f_i \rangle$ mit $d_{i+1} := \deg(f_{i+1})$ minimal. Die f_i schreiben wir nun in der Form:

$$f_i = a_i x^{d_i} + \dots \quad \text{mit } a_i \neq 0.$$

Dies liefert folgende aufsteigende Kette von Idealen in R

$$\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subset \dots,$$

die nach Voraussetzung stationär wird. Dann gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ und Werte $b_1, \dots, b_k \in R$ mit $a_{k+1} = b_1 a_1 + \dots + b_k a_k$. Wir setzen jetzt

$$g := f_{k+1} - \sum_{i=1}^k b_i x^{d_{k+1}-d_i} f_i,$$

d.h. der Koeffizient von g vor $x^{d_{k+1}}$ verschwindet. Dann ist $g \notin \langle f_1, \dots, f_k \rangle$, aber $\deg(g) < \deg(f_{k+1})$, was im Widerspruch zur Definition von f_{k+1} steht. \square

Korollar 7.16. *Der Ring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ist noethersch und jede Varietät ist von der Form $V(f_1, \dots, f_s)$ für gewisse Polynome $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

Hilberts Basissatz stellt also sicher, dass wir Varietäten zumindest im Computer darstellen können. Wir werden sehen, dass der Satz aber noch wesentlich mehr Anwendungen hat.

7.3.2 Ein Beispiel für automatisches Beweisen mit Computeralgebra

Um zu klären, welche Resultate wir herleiten müssen, um mit Hilfe von Computeralgebra geometrische Sätze beweisen zu können, versuchen wir, folgenden Satz automatisiert zu beweisen:

Satz 7.17 (Der Kreis des Apollonius). *Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei A . Die Mittelpunkte der drei Seiten und der Fußpunkt H der Höhe von A auf BC liegen auf einem Kreis (Abb. 7.1).*

Zum automatisierten Beweis formulieren wir zunächst die Behauptung in Form einer Aussage über Polynome und Ideale. Zunächst bemerken wir dazu, dass wir natürlich $A = (0, 0)$, $B = (u_1, 0)$ und $C = (0, u_2)$ wählen können. Die Mittelpunkte der Seiten haben Koordinaten $M_1 = (x_1, 0)$, $M_2 = (0, x_2)$, $M_3 = (x_3, x_4)$ (wir schreiben u_i für freie Variablen und x_i für abhängige). Die Tatsache, dass diese M_i die Seitenmitten sind, können wir ausdrücken durch:

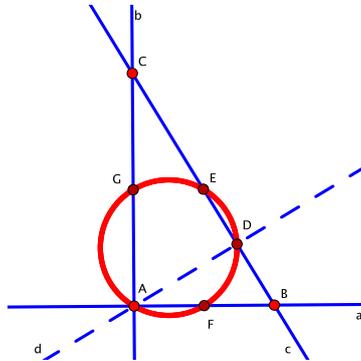


Abbildung 7.1. Auf dem Kreis des Apollonius durch die drei Seitenmitten eines rechtwinkligen Dreiecks liegt auch der Fußpunkt der nichttrivialen Höhe.

$$\begin{aligned} h_1 &= 2x_1 - u_1 = 0, \\ h_2 &= 2x_2 - u_2 = 0, \\ h_3 &= 2x_3 - u_3 = 0, \\ h_4 &= 2x_4 - u_4 = 0. \end{aligned}$$

Der Fußpunkt $H = (x_5, x_6)$ der Höhe erfüllt:

$$\begin{aligned} AH \perp BC: h_5 &= x_5 u_1 - x_6 u_2 = 0, \\ B, H, C \text{ kollinear} : h_6 &= x_5 u_2 + x_6 u_1 - u_1 u_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Aussage, dass M_1, M_2, M_3 und H auf einem Kreis liegen, drücken wir dadurch aus, dass wir fordern, dass H auf dem eindeutigen Kreis durch die drei Punkte M_1, M_2, M_3 liegt. Der Mittelpunkt dieses Kreises heiße $O = (x_7, x_8)$; damit wird gefordert:

$$\begin{aligned} |M_1 O| &= |M_2 O|: h_7 = (x_1 - x_7)^2 + (0 - x_8)^2 - (0 - x_7)^2 - (x_2 - x_8)^2 = 0, \\ |M_1 O| &= |M_3 O|: h_8 = (x_1 - x_7)^2 + (0 - x_8)^2 - (x_3 - x_7)^2 - (x_4 - x_8)^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes heißt nun $|HO| = |M_1 O|$. Dies gilt, wenn:

$$g = (x_5 - x_7)^2 + (x_6 - x_8)^2 - (x_1 - x_7)^2 - (0 - x_8)^2 = 0.$$

Der Satz ist allgemein bewiesen, wenn $g = 0$ gilt, sobald $h_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, 8$. Wie können wir dies aber nachweisen? Da wir im obigen Beispiel wegen der quadratischen Terme in h_7 und h_8 die Aussage nicht einfach durch Einsetzen der x_i in g lösen können, benötigen wir eine andere Lösungsstrategie. Zum Beispiel reicht es zu zeigen, dass $g \in \langle h_1, \dots, h_8 \rangle$. Dies ist mit Hilfe von Gröbner Basen möglich, wie wir sehen werden.

7.3.3 Gröbner Basen

Wie schon erwähnt, liefern Gröbner Basen beispielsweise eine Möglichkeit, um für ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und ein Ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ festzustellen, ob $f \in I$ gilt. Dabei wird uns helfen, dass $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ wegen Hilberts Basissatz noethersch ist und daher jedes Ideal nur endlich viele Erzeuger benötigt. Betrachten wir, um eine Idee zu bekommen, wie wir solche Probleme angehen können, den Fall von Hauptidealringen:

Beispiel 7.18. Sei $I = \langle a \rangle \subset \mathbb{Z}$ ein Ideal; wir hatten bereits in Beispiel 7.9 gesehen, dass jedes Ideal in \mathbb{Z} durch einen einzigen Erzeuger aufgespannt werden kann, dass \mathbb{Z} also ein Hauptidealring ist. Nach Definition eines Ideals ist ein beliebiges $b \in \mathbb{Z}$ in I enthalten genau dann, wenn $b = a \cdot q$ für ein gewisses $q \in \mathbb{Z}$. Ob dies der Fall ist, können wir feststellen, indem wir b durch a dividieren und dabei herausfinden, dass der Rest dieser Division Null ist.

Ganz analog ist dies möglich für ein Ideal $J \subset \mathbb{K}[x]$, das, da $\mathbb{K}[x]$ ebenfalls ein Hauptidealring ist, von der Form $J = \langle f \rangle$ für ein gewisses $f \in \mathbb{K}[x]$ ist. Ein weiteres Polynom $g \in \mathbb{K}[x]$ ist in J genau dann, wenn die Division mit Rest $g = f \cdot h + r$ mit $\deg(r) < \deg(f)$ den Rest $r = 0$ liefert. \square

Im Fall von Polynomen in mehreren Variablen wollen wir im Prinzip die gleiche Strategie verfolgen, um herauszufinden, ob $g \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Allerdings müssen wir, um einen passenden Divisionsalgorithmus angeben zu können, zunächst einmal klären, nach welcher Reihenfolge wir dabei die einzelnen Polynome f_i und deren Monome durchgehen. Bei der Polynomdivision $g : f$ in einer Variablen gehen wir ja einfach vom höchsten zum niedrigsten Grad; in mehreren Variablen gibt es aber viele Monome vom gleichen Grad. Daher müssen wir zunächst eine Ordnung auf den Monomen festlegen.

Wir werden weiterhin sehen, dass auch die Erzeuger f_i des Ideals I speziell gewählt werden müssen, damit der Rest der Division eindeutig ist und damit wir durch dessen Bestimmung nachweisen können, dass $g \in I$. Die f_i müssen nämlich eine sogenannte Gröbner Basis von I bilden.

Wir werden später sehen, dass auch noch viele weitere Anwendungen der Gröbner Basen außer der Beantwortung der Enthaltenseinsfrage für Ideale existieren. Beispielsweise können wir mit ihrer Hilfe implizite Gleichungen von parametrisiert gegebenen Kurven berechnen.

Monomordnungen

Monomordnungen werden durch Ordnungen der Exponenten definiert:

Definition 7.19. Eine *Monomordnung* $>$ auf \mathbb{N}_0^n ist eine Relation $>$ auf \mathbb{N}_0^n mit:

1. $>$ ist eine totale Ordnung auf \mathbb{N}_0^n , d.h. je zwei n -Tupel sind immer vergleichbar.
2. Ist $\alpha > \beta$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, so ist $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
3. $(0, \dots, 0)$ ist das kleinste Element.

Ist auf den Variablen von $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ eine Ordnung $x_{i(1)} > x_{i(2)} > \dots > x_{i(n)}$ vorgegeben, so überträgt sich obige Monomordnung offenbar auf Monome.

Es gibt sehr viele Monomordnungen. Je nach Anwendung ist einmal die eine, ein anderes Mal die andere praktischer. Einige mögliche Ordnungen sind die folgenden:

Definition 7.20. Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, so schreiben wir $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Damit definieren wir:

1. **Lexikographische Ordnung (lex):** Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, so ist $\alpha >_{\text{lex}} \beta$, falls

$$\text{für } j = \min\{i \mid \alpha_i \neq \beta_i\} \text{ gilt: } \alpha_j > \beta_j.$$

Dies ist die Ordnung, nach der Wörter in Lexika sortiert sind.

2. **Degree reverse lexicographical order (degrevlex):** Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, so ist $\alpha >_{\text{degrevlex}} \beta$, falls

$$|\alpha| > |\beta| \text{ oder } |\alpha| = |\beta| \text{ und für } j = \max\{i \mid \alpha_i \neq \beta_i\} \text{ ist } \alpha_j < \beta_j.$$

Beispiel 7.21. Wir betrachten die Monome des Polynoms $f = x^3yz + y^3 + x^2z + 1$ und verwenden auf den Variablen die Ordnung $x > y > z$. Dann gilt:

- $x^3yz >_{\text{lex}} x^2y^2z >_{\text{lex}} y^7 >_{\text{lex}} 1$,
- $y^7 >_{\text{degrevlex}} x^3yz >_{\text{degrevlex}} x^2y^2z >_{\text{lex}} 1$.

□

Eine spezielle Art von Idealen sind solche, die nur von Monomen erzeugt werden; diese werden eine besondere Rolle spielen:

Definition 7.22. Ein **monomiales Ideal** ist ein Ideal, das von Monomen erzeugt wird. Wir schreiben, weil wir häufig mit Monomen arbeiten werden, kurz x^α für $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Ist $>$ eine Monomordnung, $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $\beta := \max\{\alpha \mid a_{\alpha} \neq 0\}$, so definieren wir:

- $\text{mdeg}(f) := \beta$ ist der **Multigrad** von f .
- $\text{LT}(f) := a_{\beta} x^{\beta}$ ist der **Leitterm** von f .

- $LC(f) := a_\beta$ ist der **Leitkoeffizient** von f .

Leitterme und monomiale Ideale werden eine wesentliche Rolle spielen. Zunächst zu einer ersten Eigenschaft solcher Ideale:

Lemma 7.23. Sei $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $x^\beta \in I$. Dann gilt:

$$f \in I \iff \text{jeder Term von } f \text{ ist durch ein } x^{\alpha(i)} \text{ teilbar.}$$

Beweis. $f = \sum h_i x^{\alpha(i)}$ für gewisse $h_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Auf der rechten Seite der Gleichung ist jeder Term durch wenigstens ein $x^{\alpha(i)}$ teilbar, daher auch auf der linken. \square

Der Divisionsalgorithmus

Wie bereits erwähnt ist der Divisionsalgorithmus für Polynome in mehreren Variablen eine Verallgemeinerung des bekannten für eine Variable:

Algorithmus 7.24 (Divisionsalgorithmus).

Eingabe: Eine Monomordnung $>$ auf $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und Polynome $f, f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Ausgabe: Polynome $r, a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ mit:

1. $f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r$,
2. $r = 0$ oder jeder Term von r ist durch keinen der $LT(f_i)$ teilbar.
3. $\text{mdeg}(f) \geq \text{mdeg}(a_i f_i)$.

Wir schreiben für den Rest r , der hierbei auftritt, kurz f^F , wenn $F = (f_1, \dots, f_s)$. Der Algorithmus verläuft folgendermaßen:

- Wir setzen $a_1 = \dots = a_s = r = 0$ und $p = f$ und schreiben

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r + p.$$

- Solange $p \neq 0$, betrachten wir $LT(p)$ und
- suchen unter den i 's eines, für das $LT(f_i)$ das Monom $LT(p)$ teilt.
- Gibt es solche i , dann sei i_0 das kleinste darunter. Wir setzen:

$$p := p - (LT(p)/LT(f_{i_0})) \cdot f_{i_0} \text{ und } a_{i_0} := a_{i_0} + LT(p)/LT(f_{i_0}).$$

- Gibt es kein solches i , so setzen wir:

$$p := p - LT(p) \text{ und } r := r + LT(p).$$

Beweis. Die Korrektheit des Algorithmus ist klar. Dass der Algorithmus abbricht, kann man zeigen, wenn man bemerkt, dass $\text{mdeg}(p') < \text{mdeg}(p)$ ist, wenn p durch p' in einem Schritt ersetzt wurde und dass dann p irgendwann Null werden muss. Für die letzte Behauptung kann man den Basissatz verwenden; dies ist zwar nicht viel Arbeit; trotzdem verweisen wir für Details auf die angegebene Literatur. \square

Beispiel 7.25. Wir wählen die Ordnung $> = >_{\text{lex}}$ und $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = y^2 - 1$, $f_2 = xy - 1$. Der Algorithmus liefert dann die Darstellung:

$$f = (x + 1) \cdot f_1 + x \cdot f_2 + 2x + 1.$$

Der gleiche Algorithmus ergibt für die vertauschte Reihenfolge f_2, f_1 :

$$f = 1 \cdot f_1 + (x + y) \cdot f_2 + x + y + 1.$$

Das Ergebnis der Division hängt also von der Reihenfolge der f_i ab; mit Gröbner Basen können wir dieses Problem verhindern. Zum besseren Verständnis des Algorithmus sollte jede/r Leser/in dieses Beispiel auf einem Blatt Papier nachrechnen. \square

Wie schon im Beispiel angedeutet, können wir mit Hilfe von Gröbner Basen den Divisions-Algorithmus verbessern. Wir geben hier schon einmal den für unsere Anwendung des automatischen Beweisens wichtigen Satz an, obwohl wir Gröbner Basen noch gar nicht definiert haben:

Satz/Definition 7.26 (Normalform bzgl. einer Gröbner Basis). Sei $>$ eine Monomordnung auf $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, I ein Ideal und f ein Polynom. Dann gibt es eindeutig bestimmte $g, r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ mit:

1. $f = g + r$,
2. $g \in I$,
3. $r = 0$ oder kein Term von r ist in $LT(I)$.

Ist $G = (g_1, \dots, g_t)$ eine Gröbner Basis von I , so heißt $r = f^G$ die **Normalform** von f bzgl. der Gröbner Basis G .

Beweis. Erst nachdem wir in Definition 7.31 Gröbner Basen eingeführt haben werden. \square

Anwendung 7.27 (Enthaltensein-Problem / Ideal Membership Problem). Mit der eben definierten Normalform können wir nun endlich klären, wie wir die im Abschnitt 7.3.2 über die Kreise des Apollonius gestellte Frage, ob nämlich ein Polynom g in einem Ideal $I = \langle h_1, \dots, h_8 \rangle$ enthalten ist, beantworten können: Ist $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ eine Gröbner Basis von I , so ist $g \in I$ genau

dann, wenn die Normalform von g bzgl. G Null ist, d.h. falls $g^G = 0$. Um dies nachrechnen zu können, müssen wir also nur noch einen Algorithmus finden, der eine Gröbner Basis liefert; dazu werden wir das sogenannte Buchberger Kriterium verwenden.

Man könnte nun meinen, dass wenigstens die Tatsache, dass $r = f^F = 0$ ist, auch für beliebige F nicht von der Reihenfolge der Polynome $f_i \in F$ abhängt. Doch das ist im Allgemeinen nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 7.28. Wir wählen die Ordnung $> = >_{\text{lex}}$ und $f = x^2y$, $f_1 = x^2$, $f_2 = xy - 1$. Dann liefert der Divisionsalgorithmus, angewendet auf die Reihenfolge f_1, f_2 die Darstellung:

$$f = y \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0.$$

Die umgekehrte Reihenfolge f_2, f_1 ergibt:

$$f = 0 \cdot f_1 + x \cdot f_2 + x.$$

Insbesondere ist im ersten Fall der Rest 0, im zweiten Fall nicht. □

Gröbner Basen

Definition 7.29. Sei $A \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $>$ eine Monomordnung. Wir definieren

$$LT(A) := \langle LT(f) \mid f \in A \rangle$$

als *Leitermideal* von A .

Offensichtlicher Weise ist das Leitermideal ein monomiales Ideal. Gut unterscheiden muss man zwischen $LT(A)$ und $LT(\langle A \rangle)$. Diese beiden Leitermideale müssen nämlich nicht gleich sein:

Beispiel 7.30. $f = x^2 + y$, $g = xy + 1 \in \mathbb{K}[x, y]$. Bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $x > y$ ist $LT(f) = x^2$, $LT(g) = xy$, also:

$$LT(\{f, g\}) = \langle LT(f), LT(g) \rangle = \langle x^2, xy \rangle.$$

Aber auch $x - y^2 \in \langle f, g \rangle$, da $yf - xg = y^2 - x$. Daher ist also, da $LT(x - y^2) = x$, auch $x \in LT(\langle f, g \rangle)$, aber $x \notin LT(\{f, g\})$. □

Für Gröbner Basen kann dieses Problem nicht auftreten:

Definition 7.31. Sei $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Ein Tupel $G = (g_1, \dots, g_t)$ mit $g_i \in I$ heißt **Gröbner Basis** von I , wenn das Leitideal von I bereits von den Leitern von G erzeugt wird:

$$LT(I) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle.$$

Mit Hilfe dieses Begriffs können wir nun den Satz von weiter oben beweisen:

Beweis (von Satz 7.26 über die Normalform bzgl. einer Gröbner Basis). Zunächst die Eindeutigkeit: Falls $f = g + r = g' + r'$, so folgt: $r' - r = g - g' \in I$. Wäre $r' - r \neq 0$, so wäre $LT(r' - r) \in LT(I)$, was ein Widerspruch zur Definition von r und r' wäre.

Ist nun $\{g_1, \dots, g_n\}$ eine Gröbner-Basis von I , so lässt sich f mit Hilfe des Divisionsalgorithmus schreiben als:

$$f = a_1g_1 + \dots + a_tg_t + r.$$

Hierbei ist, falls $r \neq 0$, kein Term von r , wie gefordert, in $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = LT(I)$ wegen des Divisionsalgorithmus. \square

Zwei elementare, aber wichtige Eigenschaften von Gröbner Basen liefern die folgenden beiden Sätze:

Satz 7.32. *Jedes Ideal besitzt eine Gröbner Basis.*

Beweis. $LT(I)$ wird durch endlich viele Leiterterme $LT(g_i)$, $g_i \in I$, $i = 1, 2, \dots, s$ erzeugt wegen Hilberts Basissatz 7.15. Das s -Tupel (g_1, \dots, g_s) bildet eine Gröbner Basis von I . \square

Eine Gröbner Basis erzeugt tatsächlich das ganze Ideal:

Satz 7.33. *Ist (g_1, \dots, g_t) eine Gröbner Basis von I , so ist $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.*

Beweis. Ist $g \in I$, so liefert der Divisionsalgorithmus eine Darstellung

$$g = a_1g_1 + \dots + a_tg_t + r.$$

Dann folgt: $r \in I$. Wäre nun $r \neq 0$, so wäre kein Term von r und insbesondere $LT(r)$ durch einen der Terme $LT(g_i)$ teilbar. Dies ist aber ein Widerspruch, da $LT(r) \in \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$ nach Definition einer Gröbner Basis. \square

Buchbergers Kriterium

Mit Hilfe von Buchbergers Kriterium werden wir nun einen Algorithmus finden, um Gröbner Basen auch ausrechnen zu können.

Definition 7.34. *Sind $x^\alpha, x^\beta \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ Monome, so heißt*

$$\text{kgV}(x^\alpha, x^\beta) := x^\gamma, \text{ mit } \gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$$

das kleinste gemeinsame Vielfache von x^α und x^β .

Offenbar ist dies genau das, was wir automatisch unter einem kleinsten gemeinsamen Vielfachen verstehen würden. Damit definieren wir nun:

Definition 7.35. Sei $>$ eine Monomordnung auf $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und seien $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Das **S-Polynom** von f und g ist:

$$S(f, g) := \frac{\text{kgV}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))}{\text{LT}(f)} \cdot f - \frac{\text{kgV}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))}{\text{LT}(g)} \cdot g.$$

Die Leitterme in der Definition von $S(f, g)$ heben sich gegenseitig auf. Daher kann es sein, dass $\text{LT}(S(f, g))$ wesentlich kleiner ist als die Leitterme von f und g . Im Allgemeinen ist $\text{LT}(S(f, g)) \notin \langle \text{LT}(f), \text{LT}(g) \rangle$. Den tieferen Sinn der Definition der S-Polynome zeigt der folgende Satz, der fundamental für alle Berechnungen mit Gröbner Basen ist:

Satz 7.36 (Das Buchberger⁴ Kriterium). Sei $>$ eine Monomordnung auf dem Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, sei $G = (g_1, \dots, g_t)$ ein t -Tupel mit $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ und $I := \langle g_1, \dots, g_t \rangle$. Dann gilt:

$$G \text{ ist eine Gröbner Basis von } I \iff S(g_i, g_j)^G = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, t\},$$

wobei $S(g_i, g_j)^G$, wie üblich, den Rest bei Division des S-Polynoms $S(g_i, g_j)$ bzgl. G bezeichnet.

Für den Beweis müssen wir leider auf die Literatur verweisen (z.B. [CLO97]), obwohl man ihn in drei Seiten aufschreiben könnte. Das Kriterium liefert sofort folgenden Algorithmus zur Berechnung von Gröbner Basen:

Algorithmus 7.37 (Der Buchberger Algorithmus).

Eingabe: $F = (f_1, \dots, f_s)$, $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Ausgabe: Eine Gröbner Basis für $I := \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

- Wir berechnen für alle $i < j$ das S-Polynom $S(f_i, f_j)$ und ermitteln mit dem Divisionsalgorithmus den Rest $r_{ij} := S(f_i, f_j)^F$.
- Ist $r_{ij} = S(f_i, f_j)^F \neq 0$, so fügen wir dies dem t -Tupel F als $(t+1)$ -tes Element an.
- Haben wir das ursprüngliche F schließlich so lange erweitert, dass das neue $F = (f_1, \dots, f_t)$ die Eigenschaft $S(f_i, f_j)^F = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq t$ hat, so ist F eine Gröbner Basis von I . Wir setzen also $G := F$.

Beweis. Der Algorithmus terminiert nach endlich vielen Schritten, da sich beim Hinzufügen eines Polynoms zu F das Ideal $\text{LT}(F)$ vergrößert und $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ wegen des Basissatzes 7.15 noethersch ist. Das Buchberger Kriterium stellt sicher, dass G tatsächlich eine Gröbner Basis ist. \square

⁴Bruno Buchberger, 1927–

Gröbner Basen kann man also prinzipiell tatsächlich mit Hilfe eines Computers ausrechnen, auch wenn dies leicht zu einer langwierigen Angelegenheit ausarten kann. Einige frei verfügbare auf Anwendungen von Gröbner Basen spezialisierte Programme sind C C A, M 2, S . Aber auch einige kommerzielle Systeme können Gröbner Basen in annehmbarer Zeit berechnen, z.B. M und M 11. Zu Fuß kann man nur sehr kleine Beispiele durchrechnen:

Beispiel 7.38. $f_1 = t^2 - x, f_2 = t^3 - y \in \mathbb{Q}[t, x, y]$. Wir berechnen eine Gröbner Basis bzgl. der lexikographischen Ordnung mit $t > x > y$ und beginnen mit $F := (f_1, f_2)$.

- $LT(f_1) = t^2, LT(f_2) = t^3$, daher: $S(f_1, f_2) = t \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 = -tx + y$. Da $LT(-tx + y) = -tx$, liefert der Divisionsalgorithmus: $r_{12} = S(f_1, f_2)^F = -tx + y$. Wir setzen also: $f_3 := -tx + y$ und $F := (f_1, f_2, f_3)$.
- Jetzt müssen wir drei S-Polynome berechnen:
 - $S(f_1, f_2) = -tx + y$, wie gehabt,
 - $S(f_1, f_3) = -x \cdot f_1 - t \cdot f_3 = -t^2x + x^2 + t^2x - ty = -ty + x^2$ und
 - $S(f_2, f_3) = t^3x - xy - t^t x + t^2y = t^2y - xy$.

Natürlich gilt jetzt $S(f_1, f_2)^F = 0$, weil $S(f_1, f_2) = f_3$. Aber $S(f_1, f_3)^F = -ty + x^2$. Wir setzen also: $f_4 = -ty + x^2$ und $F := f_1, f_2, f_3, f_4$. Das letzte S-Polynom liefert nichts Neues, da $S(f_2, f_3)^F = 0$.

- Die jetzt noch interessanten S-Polynome sind:
 - $S(f_1, f_4) = -yt^2 + xy + t^2y - tx^2 = -tx^2 + xy$,
 - $S(f_2, f_4) = -yt^3 + y^2 + t^3y - t^2x^2 = -t^2x^2 + y^2$,
 - $S(f_3, f_4) = -txy + y^2 + txy - x^3 = y^2 - x^3$.

Nur das letzte S-Polynom ergibt einen Rest ungleich Null; wir setzen also: $f_5 := y^2 - x^3, F := (f_1, \dots, f_5)$.

Es stellt sich heraus, dass jetzt alle Teilungen den Rest Null liefern. $G := (t^2 - x, t^3 - y, -tx + y, -ty + x^2, -x^3 + y^2)$ ist also eine Gröbner Basis. \square

Schauen wir uns das Beispiel von oben etwas genauer an, so stellen wir fest, dass $x = t^2$ und $y = t^3$ die Parametrisierung der gewöhnlichen Spitze und dass $y^2 - x^3$ (das letzte Element der Gröbner Basis) deren implizite Gleichung ist (die man durch **Eliminieren** des Parameters t erhält). Tatsächlich ist das kein Zufall, denn es gilt:

Satz/Definition 7.39 (Eliminationssatz). Sei $>$ eine *Eliminationsordnung* für $U := \{u_1, \dots, u_r\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, d.h. aus $LT(f) \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r]$ folgt $f \in \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r]$. Sei $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und $I_U := T \cap \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r]$. Sei ferner G eine Gröbner Basis für I . Dann ist:

$$G_U := G \cap \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r]$$

eine Gröbner Basis von I_U .

Beweis. Mit dem Divisionsalgorithmus und dem Buchberger Kriterium folgt dies recht leicht. \square

Beispiel 7.40. Im obigen Beispiel hatten wir bemerkt, dass Eliminieren von t die Gleichung $y^2 - x^3$ liefern sollte. Die lexikographische Ordnung ist eine Eliminationsordnung für $U = \{x, y\}$ (und auch für $\{y\}$) und liefert $G := (t^2 - x, t^3 - y, -tx + y, -ty + x^2, -x^3 + y^2)$. Wir erhalten nach dem Satz also mit $G_U = G \cap \mathbb{K}[x, y]$ eine Gröbner Basis von $I \cap \mathbb{K}[x, y]$. Aber $G_U = y^2 - x^3$. Eliminieren liefert also tatsächlich eine gewöhnliche Spitze in der x, y -Ebene. Es gibt übrigens wesentlich bessere, d.h. im Allgemeinen schnellere, Eliminationsordnungen als lex. \square

In gewissem Sinn entspricht Elimination von Variablen gerade der Projektion einer Varietät auf den Unterraum der verbleibenden Variablen. Auch im Beispiel ist dies so: die Kurve im (t, x, y) -Raum, parametrisiert gegeben durch (t, t^2, t^3) (d.h. $x = t^2, y = t^3$), erscheint, wenn man sie auf die (x, y) -Ebene projiziert, als die Kurve mit der Gleichung $y^2 - x^3 = 0$ (Abb. 7.2). Dies besagt der sogenannte **Projektionssatz**. Leider können wir das hier nicht vertiefen, sondern verweisen wieder auf [CLO97].

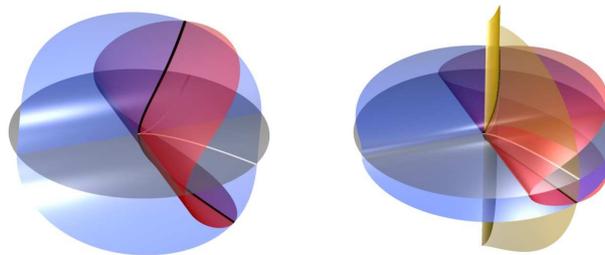


Abbildung 7.2. Die Spitze $y^2 - x^3 = 0$ (weiß) als Projektion der Schnittkurve von $x - t^2$ und $y - t^3$ (schwarz) auf die (x, y) -Ebene. Das rechte Bild zeigt zusätzlich $y^2 - x^3 = 0$ (orange) als Fläche im (t, x, y) -Raum.

Gröbner Basen haben noch viele weitere Anwendungen zur Berechnung geometrischer Informationen, auf die wir hier auch leider nicht weiter eingehen können. Anwendungen sind beispielsweise die Kryptographie, Codierungstheorie, Robotik, etc. Für unseren Themenzusammenhang der dynamischen Geometrie sind aber die Anwendungen der Gröbner Basen im Gebiet der

algebraischen Geometrie am bedeutsamsten. Beispielsweise kann man mit ihrer Hilfe für eine implizit gegebene algebraische Kurve deren Ort und Typ der Singularitäten, ihr Geschlecht und weiteres automatisiert berechnen. Ein erstes weiterführendes Buch zu diesem Thema ist [CLO97].

Gröbner Basen selbst sind übrigens nicht eindeutig, doch auch dieses Manko ist zu beheben: Eine **reduzierte Gröbner Basis** eines Ideals I ist eine Gröbner Basis G von I mit $LC(g) = 1 \forall g \in G$ und für jedes $g \in G$ gilt: kein Monom von g liegt in $LT(G \setminus \{g\})$. Für jedes Ideal gibt es nur eine reduzierte Gröbner Basis. Alle oben erwähnten Programme, die Gröbner Basen berechnen, ermitteln genau genommen reduzierte Gröbner Basen, da diese sehr schnell aus einer Gröbner Basis zu berechnen sind.

Abschließend möchten wir bemerken, dass Gröbner Basen zwar algorithmische Lösungen für viele geometrische Probleme liefern, dass aber die Laufzeit der Berechnungen typischerweise sehr groß ist. Außerdem ist nicht immer klar, welche Ordnung am Schnellsten zum Ziel führt. Beispielsweise ist oft die *degrevlex* Monomordnung zum Finden *einer* Gröbner Basis eines Ideals die wesentlich bessere Wahl als die lexikographische Ordnung. Sucht man aber eine Gröbner Basis mit einer besonderen Eigenschaft, z.B. für das Eliminieren von Variablen, so ist diese nicht geeignet. Hier gibt es also noch viele Detailprobleme, die teilweise in obigem Buch ausgeführt sind.

Wer sich für noch mehr Details interessiert, sei auf das Buch [GP02] verwiesen, das beispielsweise auch erläutert, wie man mit Gröbner Basen lokale Berechnungen durchführt, um über Singularitäten genauere Informationen zu ermitteln.

Möchte man Gröbner Basen aber nur dazu verwenden, um für ein gegebenes Polynom g herauszufinden, ob es in einem Ideal I enthalten ist, um geometrische Sätze zu beweisen, so ist die bereits erwähnte Monomordnung *degrevlex* meist eine recht gute Wahl.

A

Übungsaufgaben

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 31.10.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Die Übungen am 30. Oktober finden statt!

Wir werden die Präsenzaufgaben besprechen und ich stehe Ihnen für Fragen zur Verfügung.

Aufgabe 1 (0 Punkt(e)). Falls Sie noch keine Erfahrung mit Dynamischer Geometrie Software haben, dann experimentieren Sie mit einem der Programme `D G` oder `C` (für beide gibt es kostenfreie Windows-Versionen im Internet; außerdem sind sie im Didaktiklabor installiert), indem Sie zunächst das Beispiel der Höhen im Dreieck nachkonstruieren und dann einige kompliziertere Konstruktionen erstellen. Die Konstruktionen, die in der Vorlesung verwendet wurden, sind über die Vorlesungswebseite abrufbar.

Aufgabe 2 (2 Punkt(e)). Finden Sie — beispielsweise im Internet oder der Bibliothek — heraus, was die erste Proposition in Euklids Elementen (englisch: Euclid) besagt und geben Sie wenigstens eine Lücke im Beweis der Aussage an.

Aufgabe 3 (2 Punkt(e)). Beweisen Sie Proposition 1.5 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (2 Punkt(e)). Zeigen Sie, dass eine affine Ebene A , die eine Gerade mit genau n Punkten enthält, insgesamt genau aus n^2 Punkten besteht.

Aufgabe 5 (2 Punkt(e)). Finden Sie — entweder mit Hilfe des Internets oder Literatur — heraus, wie sich endliche affine Ebenen als sogenannte **Block Designs** auffassen lassen. Welche Parameter hat das Block Design, das der affinen Ebene mit vier Punkten entspricht? Ist diese Ebene ein symmetrisches Block Design? Gibt es ein symmetrisches Block Design mit 11 Punkten, bei dem sich je zwei Blöcke in genau 2 Punkten treffen? Falls ja, fertigen Sie dafür eine Skizze wie in Abb. 1.2 an. Geben Sie eine noch ungeklärte Frage über sogenannte Hadamard-Designs an.

Leider können wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter auf solche interessanten Verallgemeinerungen der affinen (und projektiven) Ebenen eingehen. (Symmetrische) Block Designs haben viele interessante Bezüge zur Gruppen- und Codierungstheorie.

Aufgabe 6 (Präsenzaufgabe, Affine Transformationen). Eine **affine Transformation** $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine bijektive Abbildung der Form $T(x) = Ax + b$, wobei $b \in \mathbb{R}^2$ und wobei A eine nicht-singuläre 2×2 -Matrix mit reellen Einträgen ist, d.h. $\det(A) \neq 0$. Zeigen Sie, dass T ein Automorphismus der reellen affinen Ebene ist.

Aufgabe 7 (Präsenzaufgabe, Affine Spiegelungen). Eine **affine Spiegelung** ist eine affine Transformation τ einer affinen Ebene A , die zwei Punkte Q und R vertauscht und einen Punkt P festlässt, der nicht auf der Geraden QR liegt. Zeigen Sie, dass dann τ schon die ganze Gerade PM punktweise festlässt, wobei M der Mittelpunkt der Strecke \overline{QR} ist.

Aufgabe 8 (Präsenzaufgabe, Isometrien). Eine **Isometrie** τ der euklidischen Ebene ist eine Abbildung des \mathbb{R}^2 auf sich selbst, die Abstände erhält. Bezeichnen wir mit $d(.,.)$ den euklidischen Abstand, so heißt dies genauer:

$$d(\tau(P), \tau(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, Q.$$

Zeigen Sie, dass T Geraden auf Geraden abbildet.

Insgesamt werden für dieses Blatt 8 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 07.11.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 9 (3 Punkt(e), Dilatationen). Beweisen Sie Proposition 1.16:

1. Sei \mathbb{A} eine affine Ebene. Die Menge $\text{Dil } \mathbb{A}$ der Dilatationen von \mathbb{A} bildet eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung.
2. Eine Dilatation, die zwei Punkte fest lässt, ist die Identität.
3. Eine Dilatation ist durch die Bilder zweier verschiedener Punkte bestimmt.

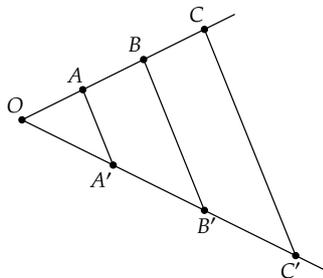
Aufgabe 10 (1 Punkt(e), Dilatationen). Sei \mathbb{A} die affine Ebene mit 4 Punkten. Welche Ordnung hat die Gruppe $\text{Dil } \mathbb{A}$ der Dilatationen? Welche Ordnung hat die Gruppe $\text{Tran } \mathbb{A}$ der Translationen?

Aufgabe 11 (2 Punkt(e), Eine affine Invariante). Seien A, B, C drei paarweise verschiedene kollineare Punkte der reellen affinen Ebene. Wir definieren

$$(A, B; C) := \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}},$$

wobei \overrightarrow{AC} die vorzeichenbehaftete euklidische Länge der Strecke \overline{AC} bezeichnet (d.h. $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$).

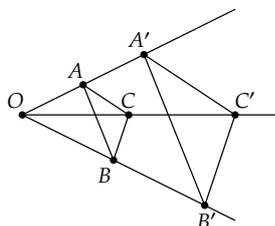
1. C ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB} \iff (A, B; C) = -1$.
2. Seien die drei Punkte A', B', C' Bilder der kollinearen Punkte A, B, C unter einer Parallelprojektion (s. Abb.).



Konstruieren Sie dies in einem dynamischen Geometrie Programm (Datei bitte per E-Mail an Labs@math.uni-sb.de schicken) und finden Sie experimentell heraus, was vermutlich für das Verhältnis von $(A, B; C)$ zu $(A', B'; C')$ gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 12 (Präsenzaufgabe, Spezialfall des Satzes von Desargues in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$). Zeigen Sie den Satz von Desargues in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (Satz 1.22) im Spezialfall, dass AA' und BB' sich in einem Punkt O schneiden, beispielsweise mit Hilfe von Streckungen:

Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke ohne gemeinsame Ecke, deren Seiten jeweils parallel sind (s. Abb.). Dann sind die Geraden AA' , BB' und CC' entweder parallel oder sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

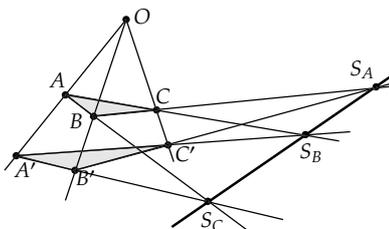


Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 14.11.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 13 (2 Punkt(e), $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$). Beweisen Sie Proposition 2.6: Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Wir betrachten die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von V und die Menge der zweidimensionalen Untervektorräume von V . Diese bilden die Punkte bzw. Geraden einer projektiven Ebene, notiert $\mathbb{P}^2(K)$.

Aufgabe 14 (2 Punkt(e), Satz von Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Beweisen Sie die eine Richtung des Satzes 2.13 von Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (d.h. alle drei Punkte sind jeweils paarweise verschieden) und $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ (siehe Abb.). Seien $S_A = BC \cap B'C'$, $S_B = AC \cap A'C'$, $S_C = AB \cap A'B'$ die Schnittpunkte entsprechender Seiten. Sind S_A , S_B und S_C kollinear, so schneiden sich die Geraden AA' , BB' und CC' in einem gemeinsamen Punkt.



Aufgabe 15 (2 Punkt(e), Eine projektive Ebene, in der der Satz von Desargues nicht gilt). Wir definieren eine affine Ebene \mathbb{A} auf der Menge \mathbb{R}^2 wie folgt: Die Punkte, vertikalen Geraden und Geraden mit negativer Steigung sind die selben wie in der gewöhnlichen reellen affinen Ebene. Eine Gerade mit positiver Steigung ist aber keine Gerade im gewöhnlichen Sinn, sondern ist zusammengesetzt aus zwei Teilen: Ein Punkt $(x, f(x))$ einer solche Geraden hat y -Koordinate

$$f(x) = \begin{cases} m(x - x_0), & x \leq x_0, \\ \frac{m}{2}(x - x_0), & x > x_0. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass \mathbb{A} tatsächlich eine affine Ebene ist. Zeigen Sie dann durch Angabe einer konkreten Konfiguration von Punkten und Geraden, dass der Satz von Desargues in der projektiven Ebene $\mathbb{S}(\mathbb{A})$, die man durch Vervollständigung von \mathbb{A} enthält, im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 16 (Präsenzaufgabe, Die Projektive Ebene mit 7 Punkten). Wie kann man in der in Abbildung 2.4 gezeigten Projektiven Ebene mit 7 Punkten die affine Ebene mit 4 Punkten erkennen?

Aufgabe 17 (Präsenzaufgabe, Affiner Satz von Desargues). Diskutieren Sie einige affine Versionen des Satz von Desargues in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 18 (2 Punkt(e), Die Sphärische Ansicht).

1. Konstruieren Sie in \mathbb{C} die Konfigurationen, die in den Sätzen von Pappus und Desargues auftauchen und schicken Sie diese bitte per E-Mail an Labs@math.uni-sb.de.
2. Experimentieren Sie mit den Konstruktionen aus dem ersten Teil ein wenig herum und machen Sie sich insbesondere klar, wie man sich die affinen Spezialfälle aus der Vorlesung auf der Kugeloberfläche veranschaulichen kann, indem Sie in der sphärischen Ansicht die Kugel drehen.
3. Zeichnen Sie in \mathbb{C} einen Kreis und experimentieren Sie mit diesem ebenso, indem Sie in der sphärischen Ansicht die Kugel drehen.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 21.11.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 19 (4 Punkt(e), Basis-Funktionen von Dynamischer Geometrie Software). In einem Programm sei das Kreuzprodukt für Vektoren im \mathbb{R}^3 implementiert. Wie kann man damit die folgenden Aufgaben in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ implementieren, wenn alle Punkte und Geraden in homogenen Koordinaten der Form $(p_1 : p_2 : p_3)$ bzw. $(g_1 : g_2 : g_3)$ vorliegen? Berechnen Sie, falls nötig, jeweils einige Beispiele.

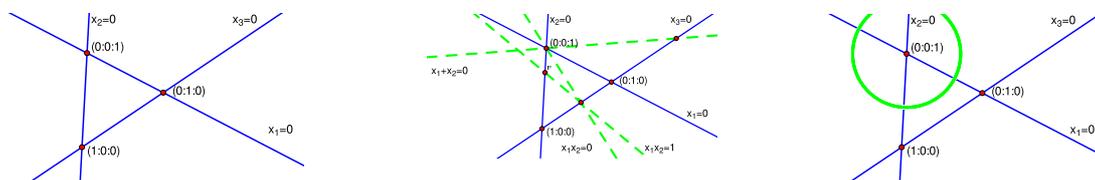
1. Die Verbindungsgerade PQ zweier verschiedener Punkte P und Q .
2. Den Schnittpunkt $P = g \cap h$ zweier verschiedener Geraden g und h .
3. Die Parallele g' zu einer gegebenen Geraden g durch P .
4. Die Gerade g mit Steigung m durch einen gegebenen Punkt P .

Dabei sei wenn nichts dazu gesagt wird, die Standard-Einbettung gewählt. Die unendlich ferne Gerade ist also $(0 : 0 : 1)$, der unendlich ferne Punkt zum Geradenbüschel mit Steigung m ist $(\cos m : \sin m : 0)$.

Aufgabe 20 (3 Punkt(e), Kreise).

1. Eine **algebraische Kurve** $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ vom Grad d besteht aus den Punkten (x, y) , die eine polynomielle Gleichung $c(x, y) = 0$ vom Grad d erfüllen. Genauso wie wir es in der Vorlesung für Geraden getan haben, definieren wir den projektiven Abschluss $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dieser Kurve durch $\bar{c} = x_3^d \cdot c(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$. Zeigen Sie, dass für einen Punkt $q \in \mathbb{R}^3$ mit $\bar{c}(q_1, q_2, q_3) = 0$ folgt: $\bar{c}(\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (d.h., \bar{c} ist ein sinnvolles Objekt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) und dass außerdem für einen Punkt $p \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ mit $c(p_1, p_2) = 0$ gilt: $\bar{c}(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda) = 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. Seien nun zwei Kreise k_1, k_2 mit Radius r_1 bzw. r_2 und Zentrum $O = (0, 0) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ und Gleichung $x^2 + y^2 = r_i^2$ gegeben. Sie haben offenbar keinen Schnittpunkt. Welche unendlich fernen Schnittpunkte haben \bar{k}_1 und \bar{k}_2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$? Die obige Konstruktion für c können wir auch für Kurven in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ durchführen, um Kurven $\bar{c} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zu erhalten. Welche unendlich fernen Schnittpunkte haben \bar{k}_1 und \bar{k}_2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$?
3. Zeigen Sie: Ist $k \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ein beliebiger Kreis mit Zentrum $p \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, so liegen die unendlich fernen Schnittpunkte aus dem vorigen Aufgabenteil auf $\bar{k} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 21 (Präsenzaufgabe, Reelle Projektive Kegelschnitte). Man kann sich die reelle projektive Ebene auch in der affinen Ebene mit Hilfe des sogenannten fundamentalen Dreiecks vorstellen (links):



Die Koordinaten-Achsen $x_i = 0$ muss man sich dabei als projektive Geraden (also mit der Topologie von Kreisen) vorstellen. In Aufgabe 20 haben wir den projektiven Abschluss einer affinen Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ definiert. Die rechten beiden Abbildungen zeigen die projektiven Abschlüsse der Geraden $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$ und des Kreises $x_1^2 + x_2^2 = 1$ in dieser Ansicht. Zeichnen Sie in eine solche Ansicht die projektiven Abschlüsse der Kegelschnitte mit den Gleichungen $x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_2^2 - x_1^2 = 1$, $x_2 = x_1^2$ ein. Was fällt auf?

Aufgabe 22 (0 Punkt(e), 1 Bonuspunkt, Duale Ebene von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $\varphi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))^*$ ein Isomorphismus von projektiven Ebenen ist: Eine Ursprungsgerade $l \subset \mathbb{R}^3$, die einen Punkt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definiert, wird abgebildet auf l^\perp , also auf den zu ihr orthogonalen Vektorraum.

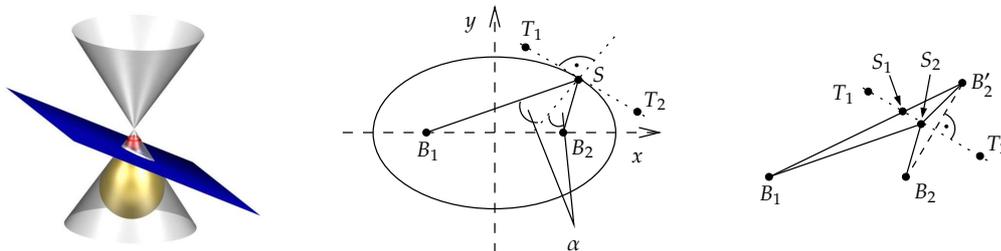
Aufgabe 23 (Präsenzaufgabe, Projektive Geraden). Analog zur Definition von $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ können wir $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definieren als Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{K}^{n+1} . Diskutieren Sie mögliche Ansichten von $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 28.11.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 24 (2 Punkt(e), Gärtner-Konstruktion der Ellipse).

- Zeigen Sie, dass jede Ellipse im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, die sich als Schnitt des Kegels mit Gleichung $x^2 + y^2 - z^2$ mit einer gewissen Ebene ergibt, die Gärtner-Konstruktions-Eigenschaft erfüllt (mittleres Bild): Für jede Ellipse gibt es zwei Punkte B_1, B_2 und eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass für jeden Punkt S der Ellipse gilt: $a_1(S) + a_2(S) = c$, wobei $a_i(S)$ der Abstand des Punktes B_i von S ist.



Hinweis: Es mag hilfreich sein, sich zwei Kugeln zu denken, die sowohl den Kegel von innen als auch die Ebene von oben bzw. unten berühren (linkes Bild).

- Konstruieren Sie eine Ellipse als Ortskurve in \mathbb{C} , indem Sie die Gärtner-Konstruktions-Eigenschaft ausnutzen und schicken Sie die Datei an Labs@math.uni-sb.de.

Hinweis: Für diejenigen, die eine aktuelle Version des Programmes einsetzen: Achtung! Möchte man in \mathbb{C} vollständige Ortskurven erhalten, so sollte man immer statt Strecken Geraden verwenden (die man dann beispielsweise in den Elementeigenschaften kürzen kann, um den optischen Eindruck einer Strecke zu erhalten).

Aufgabe 25 (2 Punkt(e), Brennpunkte der Ellipse).

- Zeigen Sie, dass eine Ellipse die in der Vorlesung angegebene Brennpunkts-Eigenschaft erfüllt, d.h. $\angle(B_1, S, T_1) = \angle(T_2, S, B_2)$.

Hinweis: Es mag helfen, den Punkt B'_2 zu betrachten, der durch Spiegelung des Punktes B_2 an der Tangente T_1T_2 hervorgeht, siehe rechtes Bild; in dem Bild liegen B_1, S_1, B'_2 auf einer Geraden.

- Benutzen Sie diese Eigenschaft, um in \mathbb{C} eine Tangente an eine Ellipse zu konstruieren, deren beide Brennpunkte gegeben sind (Datei an Labs@math.uni-sb.de).

Aufgabe 26 (Präsenzaufgabe, Brennpunkte von Hyperbel und Parabel). Diskutieren Sie Varianten der Gärtner-Konstruktion der Ellipse für Hyperbel und Parabel.

Aufgabe 27 (0 Punkt(e), 3 Bonuspunkte, Klassifikation affiner und projektiver Kegelschnitte). Benutzen Sie Satz 2.26 aus der Vorlesung, um die reellen affinen Kegelschnitte im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, sowie die projektiven Kegelschnitte im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und die komplexen projektiven Kegelschnitte im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ zu klassifizieren:

- Welche Werte haben n, m, \tilde{m} in den beiden reellen uns interessierenden Fällen?
- Zeigen Sie, dass wir uns bei den α_i auf $\alpha_i = 1$ beschränken können, wenn wir nur an einer groben Einteilung in Klassen (Ellipsen, Hyperbeln, ...) interessiert sind.
- Gehen Sie im Fall der affinen Kegelschnitte die Liste der Fälle durch und geben Sie jeweils auch anhand einer Skizze an, wie die Kurve geometrisch beschrieben werden kann (z.B. Ellipse, Parabel, Hyperbel, leere Menge, ...).
- Führen Sie das Gleiche im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ durch.
- Wie sieht daher die Klassifikation im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ aus?

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 4.12.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

Die Vorlesung am 5.12.2007 muss ausfallen, weil ich bei einer Konferenz eingeladen bin: MACIS 2007. Daher sind die Blätter bereits am Dienstag, dem 4.12.2007, in der Übung abzugeben!

Aufgabe 28 (4 Punkt(e), Es gibt höchstens einen Kegelschnitt durch 5 Punkte in allgemeiner Lage).

Zeigen Sie: Sind $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ verschiedene Punkte in allgemeiner Lage (d.h. keine vier sind kollinear), so gibt es höchstens einen Kegelschnitt durch P_1, \dots, P_5 .

Beweisen Sie dies, indem Sie annehmen, dass $C_1 \neq C_2$ zwei Kegelschnitte sind mit $C_1 \cap C_2 \supset \{P_1, \dots, P_5\}$ und indem Sie dann zwei Fälle zum Widerspruch führen:

1. C_1 ist glatt (und daher parametrisierbar nach Proposition 2.35),
2. C_1 ist nicht glatt.

Aufgabe 29 (2 Punkt(e), Kegelschnitt durch 5 vorgegebene Punkte). Wir möchten konkrete Gleichungen für Kurven finden, die durch vorgegebene Punkte gehen:

1. Seien $P = (P_1 : P_2 : P_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ und $Q = (Q_1 : Q_2 : Q_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zwei Punkte. Zeigen Sie, dass

$$PQ: \det \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & x \\ P_2 & Q_2 & y \\ P_3 & Q_3 & z \end{pmatrix} = 0$$

die Gleichung der Geraden durch P und Q ist.

2. Seien $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ fünf Punkte. Bekannterweise hat ein Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eine Gleichung der Form $ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 = 0$. Wie kann man nun aber den Kegelschnitt durch P_1, \dots, P_5 analog zur Gleichung der Geraden ebenfalls mit Hilfe einer Determinante ausdrücken?

Hinweis: Entwickeln nach der letzten Spalte liefert für die Geraden:

$$\det \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & x \\ P_2 & Q_2 & y \\ P_3 & Q_3 & z \end{pmatrix} = (*)x + (*)y + (*)z$$

für gewisse Vorfaktoren (*).

Aufgabe 30 (Präsenzaufgabe, Kurven höheren Grades durch vorgegebene Punkte). Verallgemeinern Sie Aufgabe 29 für algebraische Kurven vom Grad $d \geq 3$. Wieviele Punkte muss man vorgeben?

Aufgabe 31 (Präsenzaufgabe, Degenerierte Schnittsituationen zweier Kegelschnitte). Geben Sie Gleichungen an, die zeigen, dass die folgenden Fälle von Schnittsituationen zweier projektiver Kegelschnitte tatsächlich eintreten können:

1. 4 verschiedene Schnittpunkte,
2. 2 einfache Schnittpunkte und 1 doppelt zählender Schnittpunkt,
3. 2 doppelt zählende Schnittpunkte,
4. 1 einfacher Schnittpunkt und 1 dreifach zählender Schnittpunkt,
5. 1 vierfach zählender Schnittpunkt.

Insgesamt werden für dieses Blatt 6 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 19.12.2007 vor der Vorlesung abzugeben.

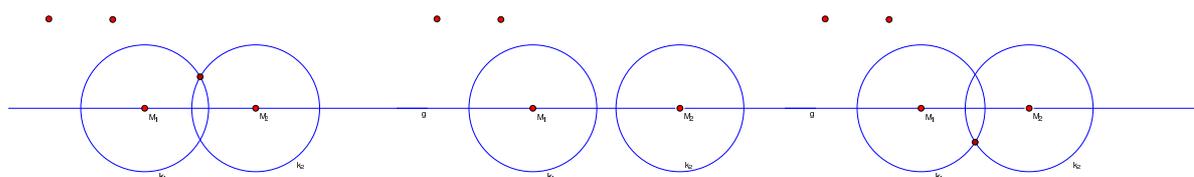
Aufgabe 32 (2 Punkt(e), Dynamische Geometrie Systeme und Intuition).

1. Finden Sie ein schönes Beispiel für nicht intuitives Verhalten von Cinderella (ein anderes als die in der Vorlesung gezeigten). Vielleicht, indem Sie ein Haus konstruieren, dessen Dach beim Verschieben eines Punktes nach unten zeigt oder was auch immer. . .
2. Finden Sie eine Konstruktion in EuklidDynaGeo, bei der Nicht-Kontinuität störend ist (auch hier eine andere als die in der Vorlesung gegebenen Beispiele).

Schicken Sie beide Konstruktions-Dateien an Labs@math.uni-sb.de.

Aufgabe 33 (3 Punkt(e), Complex Tracing).

1. Berechnen Sie mit Hilfe eines Computeralgebra-Programmes (ein Taschenrechner mag auch reichen) eine Werte-Tabelle, die verdeutlicht, wie das Complex Tracing am Beispiel der Schnittpunkte zweier Kreise k_i mit Radius 1 und Mittelpunkt M_i , funktioniert:



Die Startposition sei $M_1 = (0, 0)$ und $M_2 = (1.9, 0)$, die Endposition $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = (2.1, 0)$. Anschließend wird M_2 wieder auf seine Startposition zurückbewegt. Verwenden Sie dabei einen geeigneten Pfad, der die Singularität bei $M_2 = (2, 0)$ vermeidet.

2. Verdeutlichen Sie dies anhand einer geeigneten Graphik, z.B. wie in der Vorlesung durch Andeuten der Imaginärteile der Punkte durch Pfeile.

Aufgabe 34 (Präsenzaufgabe, Complex Tracing). Diskutieren Sie weitere Beispiele des Complex Tracing in Fällen, bei denen Singularitäten auftreten.

Aufgabe 35 (Präsenzaufgabe, Complex Tracing). Wie wirken sich Schnittpunkte mit hoher Multiplizität (d.h. für uns hier: > 2) auf das Complex Tracing aus?

Aufgabe 36 (Präsenzaufgabe, Complex Tracing im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Diskutieren Sie einige der Probleme, die auftauchen, wenn man das Complex Tracing im Projektiven vornehmen möchte (was man ja muss, wenn man ein dynamisches Geometrie Programm schreiben möchte, das mit unendlich fernen Schnittpunkten auskommt und das außerdem das Kontinuitätsprinzip verwirklicht).

Insgesamt werden für dieses Blatt 5 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 16.01.2008 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 37 (0 Punkt(e), Abgabe ist verpflichtend für jeden. Diese Aufgabe wird benotet und geht zu 1/3 in die Endnote ein!). Schreiben Sie einen Text über das Ihnen zugeordnete Thema — jedes Thema ist jeweils eine klassische ebene Kurve, die auch als Ortskurve konstruiert werden kann. Der Text soll nicht weniger als 2 Seiten und nicht mehr als 8 Seiten umfassen und folgende Kriterien erfüllen:

1. Er ist in \LaTeX geschrieben unter Benutzung des auf der Vorlesungs-Webseite bereitgestellten Beispiels (damit ich die Abgaben leicht zu einem großen Dokument zusammenfügen kann).
2. Der Text ist verständlich geschrieben und möglichst angenehm zu lesen (das ist natürlich sehr subjektiv); dazu gehört es in den meisten Fällen, dass der Text anhand einiger Bilder illustriert wird.
3. Der Text ist nicht eine fast wörtliche Kopie einer der verwendeten Quellen.
4. Es wird wenigstens an einer Stelle erläutert, wie die Kurve als Ortskurve realisiert werden kann; dies soll in \mathbb{C} auch durchgeführt werden und als Datei an Labs@math.uni-sb.de geschickt werden; natürlich dürfen Sie auch mehrere Dateien erstellen und an mich schicken.
5. Inhaltlich sollen wenigstens folgende Aspekte genannt werden:
 - a) Geschichtlicher Hintergrund (soweit herausfindbar): Wer hat die Kurve wann und warum konstruiert, etc.?
 - b) Erzeugung als Ortskurve.
 - c) Beschreibung als Nullstellenmenge eines Polynoms.
 - d) Wichtige Geometrische Eigenschaften der Kurve (Symmetrie, besondere Punkte, ...).
 - e) Viele Kurven sind de facto ganze Familien von Kurven, die von mindestens einem Parameter abhängen: in dem Fall stellen Sie bitte dar, welche wichtigen Fälle für die Parameter zu unterscheiden sind.
 - f) Wofür kann die Kurve verwendet werden (insbesondere klassische Probleme, wie z.B. Winkeltrisektion, Würfelverdopplung, ...)?
6. Es müssen nicht alle Aussagen bis ins Detail bewiesen werden, wenn sich dadurch das Dokument zu sehr aufbläht. Bitte geben Sie aber immer eine Referenz für Ihre nicht hergeleiteten Aussagen an. Meist erhöht aber ein zumindest knapper Beweis die Verständlichkeit des gesamten Textes ungemein.

Hinweis: Bei Frau Wilk-Pitz in Zimmer 423 liegt das Buch *Ausgewählte höhere Kurven* von Hermann Schmidt als Kopiervorlage aus; in diesem werden nahezu alle relevanten Aspekte dargestellt. Wer sich einige Seiten kopieren möchte, rufe bitte vorher bei Frau Wilk-Pitz an (0681 302 3430), damit sichergestellt ist, dass sie auch anwesend ist (im Prinzip ist sie auch zwischen den Jahren da). Bitte beachten Sie, dass sich manche der Abschnitte auf andere Kapitel des Buches beziehen, so dass es nötig sein könnte, mehr als ein Kapitel zu kopieren! Als Grundlage für Ihre Darstellung können Sie aber auch andere Quellen verwenden, wenn Sie sie korrekt zitieren.

Hinweis: Eine zwar kurze, aber nicht zu kurze, Einleitung in \LaTeX verbirgt sich hinter folgendem Link: <http://www.ctan.org/tex-archive/info/lshort/english/lshort.pdf>

Unter Linux ist \LaTeX inklusive aller praktischen Tools sehr einfach zu installieren. Unter Windows gibt es das MikTeX-Projekt, das eine sehr einfache Installation unter Windows realisiert: <http://miktex.org>

Insgesamt werden für dieses Blatt 0 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 23.01.2008 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 38 (3 Punkt(e), Veröffentlichen Dynamischer Geometrie).

1. Erstellen Sie eine HTML-Seite, die den Inhalt Ihrer Lösung der \LaTeX -Aufgabe 37 in maximal 7 Sätzen und mindestens einer dynamischen Konstruktion knapp vorstellt und auf Ihre PDF-Datei verweist. Diese Webseite, inklusive der dynamischen Konstruktion, soll mit jedem Java-fähigen Browser zu betrachten sein und nur die Standard-Formatierungen verwenden, damit alle Abgaben leicht in einem einheitlichen Layout auf die Webseite gestellt werden können. Außerdem soll sie Links auf die Dynamische-Geometrie-Dateien enthalten, die im Artikel verwendet werden. Die nötigen Dateien werden dafür auf dem Web-Server bereitgestellt, auf dem auch die Vorlesungs-Webseite liegt. Letztendlich werden dabei alle Dateien (.pdf, .html, .cdy, ...) im selben Verzeichnis liegen, so dass Sie nur relative Links, die keine Verzeichnisnamen enthalten, verwenden müssen. Schicken Sie alle für die Webseite benötigten Dateien (.html, .cdy, ...), an Labs@math.uni-sb.de. Die pdf-Dateien Ihrer Artikel produziere ich selbst.

Aufgabe 39 (3 Punkt(e), Konstruierbarkeit). Geben Sie für die folgenden Fragen jeweils eine Antwort und eine sehr knappe Begründung (nicht mehr als 2 Zeilen). Richtige Antworten ohne oder mit falscher Begründung geben dabei keine Punkte.

1. Ist ein reguläres 30-Eck konstruierbar?
2. Hat die Funktion $x \mapsto 4x^4 + 13x^2 + 3$ eine rationale Nullstelle?
3. Sind die Nullstellen der Funktion $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ konstruierbar?
4. Ist die Zahl $\cos 2,5^\circ$ konstruierbar?
5. Ist die Menge $M = \{a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper?
6. Gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$?

Insgesamt werden für dieses Blatt 6 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 30.01.2008 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 40 (1 Punkt(e), Tangenten). Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten in den folgenden Punkten p an die Kurven mit Gleichung $f = 0$:

1. $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f = x^2 + y^2 - 1$.

2. $p = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$, $f = y^2 - x^2 - x^3$.

Aufgabe 41 (2 Punkt(e), Singularitäten). Berechnen Sie die Ordnungen der folgenden Punkte p für die Kurven mit Gleichung $f = 0$:

1. $p = (0, 0)$, $f = (x^2 + y^2 - bx)^2 - a(x^2 + y^2)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$. Hängt die Ordnung von a, b ab?

2. $p = (1, 0)$, $f = x^3 - 2x^2 - y^2 + x$,

3. $p = (1, 0)$, $f = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^3 \cdot y^3$.

4. $p = (2, 1)$, $f = y^4 - x^3 - 4y^3 + 6x^2 + 6y^2 - 12x - 4y + 9$.

Insgesamt werden für dieses Blatt 3 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 06.02.2008 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 42 (2 Punkt(e), Singularitäten). Bestimmen Sie die Koordinaten aller Singularitäten der folgenden ebenen Kurven im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ und stellen Sie fest, welche dieser Punkte gewöhnliche k -fach-Punkte oder gewöhnliche Spitzen sind:

1. $f = y^2z - x^3$,
2. $g = (y^2 - z^2)^2 - x^3z$.

Aufgabe 43 (1 Punkt(e), Singularitäten projektiver Kurven). Sei $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ ein homogenes Polynom vom Grad d . Zeigen Sie:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = \deg(F) \cdot F.$$

Aufgabe 44 (Präsenzaufgabe, Parametrisierbarkeit). Jeder Graph $G \subset \mathbb{R}^2$ eines univariaten Polynoms $p(x)$ ist erstens eine glatte Kurve und zweitens offensichtlich parametrisierbar mit Parametrisierung $x \mapsto (x, p(x))$. Ist dies ein Widerspruch zu den Sätzen 6.17 und 6.18? Verdeutlichen Sie dies am Beispiel $p(x) = x^5$.

Insgesamt werden für dieses Blatt 3 Punkte vergeben.

Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen

Die Lösungen des Übungsblattes sind am 13.02.2008 vor der Vorlesung abzugeben.

Aufgabe 45 (2 Punkt(e), Parametrisierbarkeit). Finden Sie eine Parametrisierung der Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, die durch $F = y^2z - x^2z - x^3$ definiert wird. Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve $f = y^2 - x^2 - x^3$ an.

Aufgabe 46 (1 Punkt(e), Automatisches Sätze-Beweisen). Erstellen Sie mit C eine HTML-Seite, auf der der Benutzer aufgefordert wird, ausgehend von einem vorgegebenen Dreieck den Umkreismittelpunkt zu konstruieren. C soll dann automatisch erkennen, dass die Aufgabe korrekt gelöst wurde und dieses auch ausgeben. Senden Sie alle nötigen Dateien an Labs@math.uni-sb.de.

Aufgabe 47 (2 Punkt(e), Automatisches Sätze-Beweisen). Beweisen Sie den Satz von Pappus, indem Sie in einem Computer Algebra Programm ein Polynom f berechnen, für das gilt, dass aus $f \equiv 0$ folgt, dass der Satz von Pappus korrekt ist. Berechnen Sie außerdem, dass tatsächlich $f \equiv 0$ gilt.

Insgesamt werden für dieses Blatt 5 Punkte vergeben.

Literatur

- Aud03. M. Audin, *Geometry*, Springer, 2003.
- BL06. H.-C. G.v. Bothmer and O. Labs, *Geometrical Animations Advent Calendar 2006*, www.Calendar.AlgebraicSurface.net, 2006.
- BR92. A. Beutelspacher and U. Rosenbaum, *Projektive geometrie*, Vieweg, 1992.
- CLO97. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, 2 ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- Dim87. A. Dimca, *Topics on Real and Complex Singularities*, Vieweg, 1987.
- Dur20. C.V. Durell, *Modern Geometry: The Straight Line and Circle*, Macmillan, 1920.
- Fis94. G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg, 1994.
- GP02. G.-M. Greuel and G. Pfister, *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- Hal74. P.R. Halmos, *Naive set theory. Reprint.*, Undergraduate Texts in Mathematics. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag. VII, 104 p. Cloth DM 13.50; \$ 5.50, 1974 (English).
- HCV32. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932.
- Joy96. D.E. Joyce, *Euclid's Elements Online*, Dept. Math. & Comp. Sci. Clark University, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>, 1996.
- KK96. L. Kadison and M.T. Kromann, *Projective Geometry and Modern Algebra*, Birkhäuser, 1996.
- Kle22. F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. II, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1922.
- Kle25. ———, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, vol. I-III, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1925.
- Kor99. U. Kortenkamp, *Foundations of Dynamic Geometry*, Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 1999.
- KRG01. U. Kortenkamp and J. Richter-Gebert, *Cinderella*, www.cinderella.de, 2001.
- LS07. O. Labs and F.-O. Schreyer, *Algebraische Topologie — Eine kurze Einführung*, Tech. report, Universität des Saarlandes, 2007.
- Mar98. G. E. Martin, *Geometric Constructions*, Springer, 1998.
- OR07. J.J. O'Connor and E.F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>, 2007.
- Ran95. *Randomized Algorithms*, ch. 7, Cambridge University Press, 1995.

- Rei88. M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 1988.
- Sch49. H. Schmidt, *Ausgewählte höhere Kurven*, Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.
- Sch06. F.-O. Schreyer, *Mathematik für Informatiker 2 (Lineare Algebra)*, Tech. report, Universität des Saarlandes, 2006, Ausarbeitung von Oliver Labs, verfügbar via www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/.
- SS02. C.J. Scriba and P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Springer, 2002.
- Var07. Various, *Deutsche Wikipedia*, <http://de.wikipedia.org>, 2007.

Index

- P liegt auf l 14
- k -facher Punkt 97
- l geht durch P 14
- Tag 86

- affine Ebene 14
- affine Invariante 16
- affine Spiegelung 128
- affine Transformation 128
- affine Varietät 112
- algebraische Kurve 131
- algebraische Zahl 82
- algebraische Zahlen
 - Körper der 82
- allgemeiner Lage 50
- Automorphismus 16, 25
 - einer affinen Ebene 16

- Büschel 24
- Basis der Konchoide 74
- Bewegung 39
- Block Design 128
 - symmetrisch 128
- Buchbergers Kriterium 123

- Computeralgebra 111

- Degree reverse lexicographical order 118
- degrevlex 118
- desarguesche projektive Ebene 54
- deterministisch 58
- Dilatation 18
- Division mit Rest 112

- doppelt zählende 45
- Dreieck
 - Höhen im 6
- Dreiecke 22
- duale projektive Ebene 53

- echte Translation 19
- Eliminationsordnung 124
- Eliminationsatz 124
- Eliminieren 124
- endliche affine Ebene 15
 - Ebene mit vier Punkten 15
- Enthaltensein-Problem 120
- erweiterten euklidischen Algorithmus 112
- euklidische Ring 114
- euklidischen Körper 71

- Fermat-Primzahl 83
- Formel von Euler 102

- Gerade 25
- Geraden 14, 25
- Geschlecht 103
- gewöhnliche Gerade 25
- gewöhnliche Spitze 91, 102
- gewöhnlicher k -fach-Punkt 100
- gewöhnlicher Doppelpunkt 91
- glatt 95
- glatt in p 95
- glatter 44
- Gröbner Basis 121

- Hauptidealringe 114

- Hilberts Basissatz 113, 115
 homogene Polynome 44
 homogenisierende Variable 44
- Ideal 112
 Ideal Membership Problem 120
 imaginäre Einheit 60
 Instanz 110
 Inzidenzmatrix 16
 inzidiert 14
 irreduzibel 103
 Isometrie 128
 isomorph 25
 Isomorphismus 25
 iterierte quadratische Erweiterung 72
- kanonische Einbettung 33
 Karte 35
 Klasse von affinen Kegelschnitten 41
 kleinste gemeinsame Vielfache 122
 Knotenpunkt 91
 kollinear 14
 komplexen Zahlen 60
 Konchoide des Nikomedes 74
 konstruierbar 69
 konstruierbare Gerade 70
 konstruierbare Zahl 70
 konstruierbarer Kreis 70
 konstruierbarer Punkt 69
 kontinuierlich 59
 Kontinuitätsprinzip 59
 Koordinatentransformation 41
 Koordinatenwechsel 17
 kopunktal 54
- Leitkoeffizient 119
 Leitterm 118
 Leittermideal 121
 lex 118
 Lexikographische Ordnung 118
- Möbiusband 35
 Matrix
 hermitesch 37
 symmetrisch 37
 Monodromie 66
 Monoid 104
 monomiales Ideal 118
 Monomordnung 117
- Moultons Ebene 130
 Multigrad 118
 Multiplizität 48
- nicht-degenerierter 44
 noethersch 113
 Normalform 120
 Normalteiler 20
 Nullstellenmenge 112
- $O(n)$ 38
 Ordnung der endlichen projektiven Ebene 28
 Ordnung von f in p 97
 Ortskurve 10
- parallel 14
 Parallelenaxiom 14
 Parametrisierbarkeit 102
 Parametrisierung 47, 93, 102
 von Monoiden 104
 Pascalsche Schnecke 92
 Pol der Konchoide 74
 Polarkoordinaten 61
 Projektionssatz 125
 projektiv äquivalent 46
 projektive Ebene 25
 projektive Varietäten 112
 projektiven Abschluss 33
 Punkt im Unendlichen 25
 Punkt in der Richtung von l 25
 Punkte 14, 25
- quadratische Erweiterung 71
 Quadratrix des Dinostratus 76
 Quadratur des Kreises 76, 81
 Quadrik 39
- reduzierte Gröbner Basis 126
 reelle affine Ebene 14
 reelle projektive Ebene 33
 reelle projektive Ebene 26
- S-Polynom 123
 Satz von Bézout 48
 Schnittmultiplizität 99
 singular 95
 singular in p 95
 singularer Punkt 95
 Singularität 95

- Singularitäten 91
SO(n) 38
Sphärenmodell 29
stationär 114
Streckung 18
Streckung mit Zentrum 19
Streckungsfaktor 18
- Tangente 95,99
Translation 19
transzendent 82
- unendlich ferne Gerade 25
unendlich ferner Punkt 25
- Verschiebung 19
Vervollständigung 25
Vielfachheit 48
- Würfelverdopplung 73
Winkeldreiteilung 76,78

Nachwort

Ich hoffe, dass den Hörer/innen die Vorlesung gefallen hat, dass sie während des Semesters viel gelernt haben und dass ich die Faszination, die das Zusammenspiel von Geometrie und Algebra ausüben kann, zumindest andeutungsweise vermitteln konnte.

Leider mussten zwei Vorlesungs-Doppelstunden ausfallen, so dass die Vertiefung der projektiven Geometrie, die ich eigentlich geplant hatte, wegfallen musste. Daher konnte ich leider die duale projektive Ebene, das Doppelverhältnis, den Satz von Pascal und die Idee, wie man eine Metrik auf der projektiven Ebene einführen kann (die für die dynamische Geometrie sehr wichtig ist) nicht vorstellen. Für das prinzipielle Verständnis der spezifischen Probleme, die dynamische Geometrie aufwirft, sind diese Punkte zwar nicht wirklich relevant, doch wäre ein besseres Verständnis der projektiven Geometrie sicher hilfreich. Selbstverständlich gilt Ähnliches auch für alle anderen Themen der Vorlesung, die wir ebenso aus Zeitmangel nur anreißen konnten. Daher hoffe ich, dass ich den Hörer/innen Lust gemacht habe, sich anhand der angegebenen Literatur oder anderen Vorlesungen weiter zu informieren.

Weiterhin hoffe ich, dass ich die Rückmeldungen, die ich zu Beginn der Veranstaltung wegen der manchmal zu schwierigen Übungsaufgaben und wegen des teilweise zu schwierigen Stoffes bekommen habe, im Laufe des Semesters gut umgesetzt habe, so dass das Niveau am Ende den Kenntnissen der meisten Hörer/innen angepasst war.

Mir selbst hat die Vorlesung und die aktive Mitarbeit vieler Hörer/innen sehr viel Spaß gemacht. Insbesondere die Abgaben der langen Weihnachts-Aufgabe, in der die Hörer/innen selbständig in Zweiergruppen in \LaTeX jeweils eine der klassischen Ortskurven präsentierten, waren sehr gelungen.

Im Februar 2008,

Oliver Labs