

Oliver Labs
Frank-Olaf Schreyer

Algebraische Topologie

Eine kurze Einführung.

Skript zu einer zweistündigen Vorlesung,
gehalten in Saarbrücken von Oliver Labs
im Sommersemester 2007.

Version vom 26. September 2007

Ausgearbeitet und mit \LaTeX gesetzt sowie
Bilder erzeugt mit xFIG oder SURFEX
von **Oliver Labs**

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	3
0.1	Die grundlegende Fragestellung	3
0.2	Erinnerung an die wesentlichen Begriffe	4
0.3	Zusammenhang und Wegzusammenhang	6
1	Die Fundamentalgruppe	13
1.1	Definition der Fundamentalgruppe und erste Beispiele	13
1.2	Die Fundamentalgruppe des Kreises	20
1.2.1	Berechnung der Fundamentalgruppe	20
1.2.2	Die Umlaufzahl	23
1.2.3	Eine Anwendung	23
1.3	Überlagerungen und Liftungen	25
1.4	Decktransformationen und Universelle Überlagerung	30
1.4.1	Gruppenoperationen	30
1.4.2	Decktransformationen	33
1.4.3	Lokaler Wegzusammenhang	35
1.4.4	Universelle Überlagerung	40
1.5	Der Satz von Seifert – van Kampen	44
1.5.1	Anwendungen	45
1.5.2	Der Beweis des Satzes	48
2	Homologie	51
2.1	Kategorien und Funktoren	51
2.2	Erinnerung: Abelsche Gruppen	53
2.2.1	Freie abelsche Gruppen	53
2.2.2	Exakte Sequenzen abelscher Gruppen	55
2.2.3	Endlich erzeugte Abelsche Gruppen	56
2.3	Simpliziale Homologie	58
2.3.1	Simpliziale Komplexe	58
2.3.2	Simpliziale Homologie	61
2.3.3	Komplexe	64
2.4	Singuläre Homologie	65
2.5	Das Ausschneidungsaxiom	70
2.5.1	Anwendungen des Ausschneidungsaxioms	72

2.5.2	Beweis des Ausschneidungsaxioms	76
	Baryzentrische Unterteilung	76
	Die Gruppen $H_n(X, \alpha)$	77
	Der Beweis des Ausschneidungsaxioms	79
2.6	Zusammenhang simpliziale/singuläre Homologie	80
2.7	Zur Klassifikation der kompakten orientierbaren Flächen	84
Literatur		87
Index		89

Vorlesungsverzeichnis

1.	(18. April '07) Fragestellung, Begriffe, (Weg-)Zusammenhang	3
2.	(25. April '07) Definition Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$, Bsp: $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$	13
3.	(2. Mai '07) Die Fundamentalgruppe des Kreises: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$	19
4.	(9. Mai '07) Überlagerungen und Liftungen	25
5.	(16. Mai '07) Decktransformationen. Definition, erste Eigenschaften	30
6.	(23. Mai '07) Decktransformationen, Universelle Überlagerung	36
7.	(6. Juni '07) Exist. univers. Überlagerung, Seifert – van Kampen	41
8.	(13. Juni '07) Beweis Seifert – van Kampen, algebraische Grundlagen	48
9.	(20. Juni '07) Simpliziale Homologie	58
10.	(27. Juni '07) Singuläre Homologie	65
11.	(4. Juli '07) Das Ausschneidungsaxiom und Anwendungen	70
12.	(18. Juli '07) Beweis Ausschneidungsaxiom, Homologie-Axiome	76

Abbildungsverzeichnis

0.1	Zwei nicht-homöomorphe Teilmengen des \mathbb{R}^2	3
0.2	Drei Knoten im \mathbb{R}^3	4
0.3	Stereographische Projektion vom Nordpol des Kreises auf \mathbb{R}	6
0.4	Verknüpfung von Wegen.	7
0.5	Ein zusammenhängender nicht wegzshgd. Raum.	11
1.1	Homotopie von Wegen.	14
1.2	Assoziativität der Verknüpfung von Wegen.	14
1.3	Der konstante Weg.	15
1.4	Verknüpfung homotoper Wege.	16
1.5	Das neutrale Element von $\pi_1(X, x_0)$	16
1.6	Nicht-Kommutativität von $\pi_1(X, x_0)$	17
1.7	Eine Homotopie zwischen $\tau^{-1} * (f_0 \circ \alpha) * \tau$ und $f_1 \circ \alpha$	19
1.8	Liftung eines Weges in der S^1 mit $c(0) = 1$	21
1.9	Die Umlaufzahl.	23
1.10	Zum Satz von Rouché.	24
1.11	Überlagerung des Kreises und eine triviale Überlagerung.	26
1.12	Die Blätterzahl.	27
1.13	Das Möbiusband.	32
1.14	Der Torus.	33
1.15	Die Kleinsche Flasche.	33
1.16	Ein wegzusammenhängender nicht lokal wegzshg. Raum.	36
1.17	$\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, 1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ anschaulich.	40
1.18	Semilokal einfacher Zusammenhang.	43
1.19	Berechnung der Fundamentalgruppe der Sphäre.	46
1.20	Die Fundamentalgruppe der ∞ -Figur.	47
2.1	Einige Standardsimplizes.	59
2.2	Der Rand des Standard-Simplexes.	59
2.3	Ein Beispiel, das keinen simplizialen Komplex bildet.	60
2.4	Der Standard-2-Simplex ist homöomorph zur S^2	60
2.5	Zwei Triangulierungen des Möbiusbandes.	60
2.6	Zur Definition der Randabbildung ∂_p	61
2.7	Die Prismenkonstruktion zum Beweis des Homotopieaxioms.	69
2.8	Die Randabbildung.	71

X ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.9	Die Situation beim Ausschneidungsaxiom.	71
2.10	Die Situation bei der zweiten Formulierung.	72
2.11	Berechnung der Homologiegruppen der Sphäre.	74
2.12	Baryzentrische Unterteilung.	76
2.13	Definition von der Abbildung K_b	77
2.14	Eine Facette und ihre duale Facette.	81
2.15	Orientierbarkeit einer Fläche.	85
2.16	Flächen vom Geschlecht 1, 1, 2.	85
2.17	Die Normalform eines Polygons.	85

Vorwort

Die Topologie beschäftigt sich mit den grundlegenden Eigenschaften geometrischer Objekte bzw. topologischer Räume. Zwei Räume werden dabei als topologisch gleich (homöomorph, \approx) angesehen, wenn zwischen ihnen eine bijektive stetige Abbildung existiert, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist. Beispielsweise sind ein Rettungsring und ein Ball mit Henkel homöomorph; eine Kugel ist aber nicht zu diesen beiden Objekten homöomorph:



Dies ist allerdings keineswegs offensichtlich. Die algebraische Topologie versucht, die Entscheidung, welche Objekte homöomorph sind, zu lösen, indem sie jedem topologischen Raum ein gewisses algebraisches Objekt (beispielsweise eine Gruppe) so zuordnet, dass für zwei homöomorphe Räume die zugeordneten Objekte isomorph sind. Haben wir also umgekehrt für zwei Räume berechnet, dass die zugeordneten Objekte nicht isomorph sind, so können die Räume nicht homöomorph sein.

Die Konzepte der algebraischen Topologie sind grundlegend für viele Bereiche der Geometrie. Beispielsweise basiert hierauf ein Teil der Klassifikation von Singularitäten von Kurven in der komplexen Ebene. Noch naheliegender ist deren Verwendung bei der reellen algebraischen Geometrie, in der sogar viele Aussagen topologischer Natur sind, wie beispielsweise Harnacks obere Schranke für die Anzahl reeller Zusammenhangskomponenten einer reellen ebenen algebraischen Kurve.

In der Vorlesung werden zwei wesentliche Möglichkeiten für solche algebraischen Objekte vorgestellt, nämlich die Fundamentalgruppe und die Homologiegruppen. Die Fundamentalgruppe wird hierbei in Termen von Decktransformationen von Überlagerungen interpretiert, mit deren Hilfe wir den

Satz von Seifert – van Kampen beweisen. Dieser Satz erleichtert erheblich die Berechnung von Fundamentalgruppen und bildet den Höhepunkt des ersten Teils der Vorlesung. Die höher-dimensionalen Analoga der Fundamentalgruppe sind sehr schwierig zu berechnen. Daher gehen wir im zweiten Teil der Vorlesung auf die leichter zugänglichen Homologiegruppen ein. Wir führen diese zunächst mit Hilfe der anschaulich recht leicht verständlichen simplizialen Homologie ein, bevor wir schließlich die singuläre Homologie behandeln. Zu deren Berechnung wird die Mayer–Vietoris–Sequenz das wesentliche Hilfsmittel sein.

Leider können wir aus Zeitgründen (12 Doppelstunden) weder auf die Kohomologietheorie noch auf Poincaré–Dualität eingehen. Wir können aber alle wichtigen Sätze über die Fundamentalgruppe sowie über Homologiegruppen beweisen und die vorgestellte Theorie mit vielen interessanten klassischen, sowie anschaulichen Beispielen und Anwendungen illustrieren.

An die Hörer wird, außer der großen Menge an Stoff, die in recht kurzer Zeit ohne begleitende Übungsstunden präsentiert wird, kaum eine Anforderung gestellt. Genauer setzen wir an Wissen nur Mengenleere, ein wenig lineare Algebra und Algebra (insbesondere Gruppentheorie, hier hauptsächlich abelsche Gruppen), grundlegende topologische Begriffe (wie (gleichmäßig) stetig, kompakt) und etwas Analysis (reelle Zahlen, Intervalle, Zwischenwertsatz, komplexe Zahlen) voraus. Grundlagen der komplexen Analysis, also der Funktionentheorie, sind hilfreich, aber nicht notwendig. Abgesehen von der Gruppentheorie sollten also alle nötigen Grundlagen aus den Grundvorlesungen bekannt sein; wir werden daher an die wichtigsten Resultate aus der Gruppentheorie, die wir benötigen, wenigstens kurz erinnern. Sollte doch Unklarheit bezüglich eines von uns ohne ausführliche Erklärung verwendeten grundlegenden Begriffes oder Faktens herrschen, so liefert [May89] (insbesondere das einführende Kapitel) in den meisten Fällen eine gut verständliche Erläuterung.

Als Appetithäppchen verweisen wir auf die vom Dozenten gemeinsam mit H.-C. Graf von Bothmer erstellten Animationen, die auf unserer Webseite einsehbar sind und die einige der in der Vorlesung behandelten Konzepte visualisieren: www.Calendar.AlgebraicSurface.net.

Diese Vorlesung basiert auf mehreren Büchern und Skripten, insbesondere aber auf [Ful95], [May89], [SZ88], [Hat02] sowie den handschriftlichen Vorbereitungen einer ebenfalls zweistündigen Vorlesung, die der zweite Autor im Wintersemester 2003/04 gehalten hat. Im Vergleich zur Letzteren behandeln wir zwar etwas weniger Theorie, besprechen dafür aber mehr konkrete Beispiele und setzen weniger Hintergrundwissen als bekannt voraus.

Einführung

0.1 Die grundlegende Fragestellung

— 1. Vorlesung:
18. April '07 —

Wir beginnen mit einem Beispiel, an dem wir die wesentliche Frage, auf die wir in dieser Vorlesung eingehen werden, erläutern können:

Frage 0.1. *Gibt es zwischen zwei gegebenen topologischen Räumen X und Y (beispielsweise Teilmengen des \mathbb{R}^n) eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrung ebenfalls stetig ist (einen sogenannten **Homöomorphismus**, Notation: $X \approx Y$)?*

Beispiel 0.2. 1. Augenscheinlich gibt es zwischen den beiden Teilmengen X und Y des \mathbb{R}^2 , die in Abbildung 0.1 zu sehen sind, keinen Homöomorphismus. Aber wie beweist man dies?

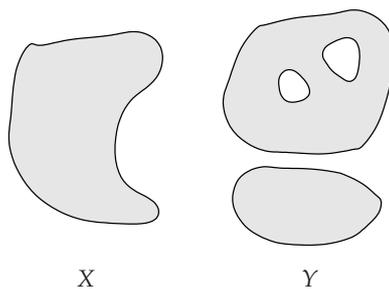


Abbildung 0.1. Zwei nicht-homöomorphe Teilmengen X und Y des \mathbb{R}^2 .

2. Komplemente von Knoten (s. auch die Webseite: [Sch98]). Zwischen den Komplementen Y und Z der in Abbildung 0.2 gezeigten Knoten gibt es

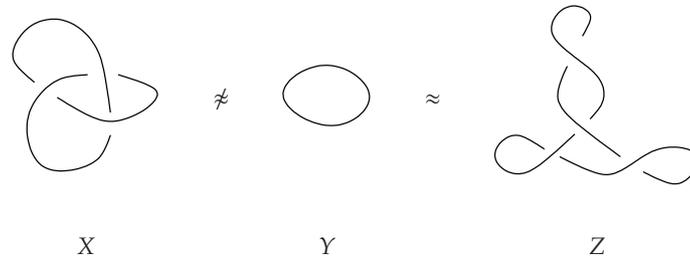


Abbildung 0.2. Drei Komplemente von Knoten im \mathbb{R}^3 : X = Komplement der Kleeblattschlinge, Y = Komplement des trivialen Knotens, Z = Komplement eines weiteren Knotens. Es gilt: $X \neq Y \approx Z$.

einen Homöomorphismus, zwischen X und Y aber nicht. Wie können wir dies nachweisen?

□

Grundlegende Idee der algebraischen Topologie ist es, topologischen Räumen X ein algebraisches oder diskretes Objekt $H(X)$ zuzuordnen, so dass für zwei topologische Räume X, Y gilt:

$$X \approx Y \Rightarrow H(X) \cong H(Y).$$

Dann liefert nämlich die Nicht-Isomorphie der zugeordneten algebraischen Objekte die Nicht-Homöomorphie der topologischen Räume:

$$H(X) \not\cong H(Y) \Rightarrow X \neq Y.$$

0.2 Erinnerung an die wesentlichen Begriffe

Obwohl wir, wie im Vorwort erwähnt, grundlegende topologische Begriffe als bekannt voraus setzen, erinnern wir kurz an die wesentlichsten Definitionen. Eine ausführlichere Diskussion dieser und anderer Begriffe, wird beispielsweise im einführenden Kapitel von [May89] gegeben.

Definition 0.3. Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X , die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus \mathcal{T} gehört zu \mathcal{T} .
2. Der Durchschnitt je zweier Mengen aus \mathcal{T} gehört zu \mathcal{T} .
3. Die Menge X und die leere Menge \emptyset gehören zu \mathcal{T} .

Ein Element von \mathcal{T} heißt **offene Menge** der Topologie \mathcal{T} . Eine Teilmenge A von X heißt **abgeschlossen** bezüglich \mathcal{T} , falls ihr **Komplement** $A^c := X \setminus A$ bezüglich \mathcal{T} offen ist. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , bestehend aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{T} auf X .

Beispiel/Definition 0.4. 1. Ist X eine beliebige Menge, so ist die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ von X , also die Menge aller Teilmengen von X , eine Topologie, die sogenannte **diskrete Topologie**.

2. Sei X eine beliebige Menge. Die Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist diejenige mit der geringsten Anzahl von Elementen. Manchmal wird diese Topologie trefenderweise **indiskrete Topologie** genannt.

□

Oft ist aus dem Kontext klar, welche Topologie auf einer betrachteten Menge verwendet werden soll; daher schreiben wir für einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) meist kurz nur X .

Um topologische Räume miteinander vergleichen zu können, benötigen wir Abbildungen zwischen ihnen:

Definition 0.5. X und Y seien topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x \in X$. f heißt **stetig in x** , wenn es zu jeder offenen Umgebung V von $f(x)$ eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $f(U) \subset V$. f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

X und Y sind **homöomorph**, wenn es eine bijektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gibt, so dass $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. f heißt dann **Homöomorphismus**. Wir schreiben dann kurz $X \approx Y$.

Beispiel 0.6. 1. Sei

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + b,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre reelle $n \times n$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. Dann sind $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f(X)$ offenbar homöomorph. Affine Abbildungen (verschieben, drehen, spiegeln, strecken, scheren, stauchen) liefern also immer homöomorphe Teilräume.

2. Wir schreiben

$$D^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$$

für den abgeschlossenen n -dimensionalen **Einheitsball** und

$$\overset{\circ}{D}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

für die offene Variante. Mit dieser Notation ist die Abbildung

$$f: \overset{\circ}{D}^1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 - |x|}$$

ist ein Homöomorphismus ($\overset{\circ}{D}^1 = [0, 1)$).

3. Wir notieren die n -dimensionale **Einheitssphäre** (im \mathbb{R}^{n+1}) als

$$S^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Stereographische Projektion vom Nordpol $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ des **Einheitskreises** $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ zeigt, dass: $S^1 \setminus \{(0, 1)\} \approx \mathbb{R}$.

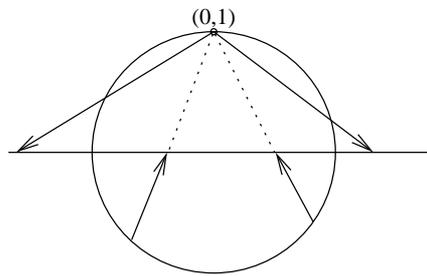


Abbildung 0.3. Stereographische Projektion vom Nordpol des Einheitskreises auf \mathbb{R} .

□

0.3 Zusammenhang und Wegzusammenhang

Im Beispiel 0.2.1 ist die einfachste Idee, mit der wir die beiden topologischen Räume unterscheiden können, vielleicht der Wegzusammenhang. Dieses Konzept diskutieren wir im Folgenden, insbesondere erläutern wir den Unterschied zum verwandten Begriff des Zusammenhangs.

Definition 0.7. Sei X ein topologischer Raum und seien $x_0, x_1 \in X$. Ein **Weg** von x_0 nach x_1 ist eine stetige Abbildung

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1.$$

Existiert ein Weg zwischen x_0 und x_1 , so heißen diese beiden Punkte **durch einen Weg verbindbar**.

Mit ε_{x_0} bezeichnen wir den **konstanten Weg** mit $\varepsilon_{x_0}(t) = x_0 \forall t$. Ein Weg α heißt **geschlossen**, falls $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Die Menge der geschlossenen Wege bezeichnen wir mit $\Omega(X, x_0)$.

Offensichtlich kann man zwei Wege zu einem zusammenfassen, wenn sie aneinander passen:

Satz/Definition 0.8. Sind $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$, dann ist

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

der *verknüpfte Weg* ein Weg von $x_0 = \alpha(0)$ nach $x_1 = \beta(1)$ (Abb. 0.4).

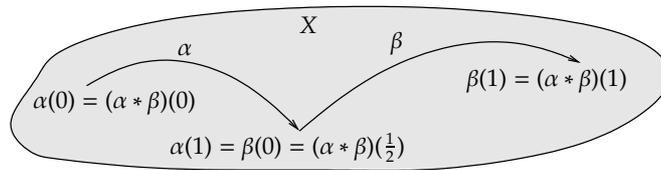


Abbildung 0.4. Verknüpfung von Wegen.

Satz/Definition 0.9. Ist $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 , dann ist $\alpha^{-1}: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ ein Weg von x_1 nach x_0 , der *inverse Weg*.

Mit den eben eingeführten Bezeichnungen können wir direkt einsehen, dass der folgende Satz gilt:

Satz/Definition 0.10. „Durch einen Weg verbindbar“ ist eine Äquivalenzrelation auf den Punkten eines topologischen Raumes X . Eine Äquivalenzklasse von wegverbindbaren Punkten von X heißt **Wegzusammenhangskomponente** von X . Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit: $\pi_0(X)$.

Beweis. Reflexivität: $x \in X$. Der konstante Weg ε_x verbindet x mit sich selbst.

Symmetrie: $x_0, x_1 \in X$ seien durch einen Weg α verbindbar. Der inverse Weg α^{-1} ist ein Weg von x_1 nach x_0 .

Transitivität: Dies folgt direkt aus der Definition des verknüpften Weges. □

$\pi_0(X)$ ist vielleicht die einfachste topologische Invariante. Die Tatsache, dass $\pi_0(X)$ tatsächlich eine topologische Invariante ist, muss natürlich nachgewiesen werden. Dies ist aber recht leicht; siehe beispielsweise 6.14 und 6.22 in [May89].

Beispiel 0.11. 1. Im obigen Beispiel 0.2.1 gilt wegen des Zwischenwertsatzes, der aus der Analysis zwar bekannt sein sollte, den wir später aber in Satz 0.19 nochmals (allerdings in unserer topologischen Sprache) beweisen werden:

$$|\pi_0(X)| = 1, |\pi_0(Y)| = 2.$$

Also folgt: $X \not\approx Y$. Schwieriger ist es zu zeigen, dass die einzelnen Komponenten von Y in diesem Beispiel nicht zu X homöomorph sind.

2. Ist $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus mit $f(x_0) = y_0$, so wird nach Definition auch $f(X \setminus \{x_0\})$ homöomorph auf $Y \setminus \{y_0\}$ abgebildet und somit gilt:

$$\pi_0(X \setminus \{x_0\}) = \pi_0(Y \setminus \{y_0\}).$$

Dies können wir benutzen, um die Nicht-Homöomorphie gewisser Räume zu zeigen. Beispielsweise folgt daraus:

$$S^1 \not\cong [0, 1],$$

da $|\pi_0(S^1 \setminus \{x\})| = 1 \forall x \in S^1$, aber $|\pi_0([0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\})| = 2$.

3. Auf ähnliche Weise kann man die Frage nach der Homöomorphie der Buchstaben des Alphabets

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

lösen. Beispielsweise gilt $H \not\cong Y$, weil es bei H zwei Punkte gibt, die den Buchstaben in drei Wegzusammenhangskomponenten aufteilen, bei Y aber nur einen. Hierbei kommt es auf die gewählte Schriftart an: $U \not\cong U$.
 |— Die Klassen sind offenbar: {A, R}, {B}, {C, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z}, {D, O}, {E, F, G, T, Y}, {H}, {K, X}, {P}, {Q}. —|

—
 Als Übung!
 —

□

Eine Eigenschaft, die — wie wir sehen werden — ein wenig schwächer ist als der Wegzusammenhang, ist der Zusammenhang.

Definition 0.12. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht Vereinigung von zwei nicht-leeren, disjunkten, offenen Teilmengen ist. Eine Teilmenge A von X heißt **zusammenhängend**, wenn der Teilraum A zusammenhängend ist. Hierbei hat A die **Teilraumtopologie** $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ (den Beweis, dass dies tatsächlich eine Topologie ist, kann der Leser in [May89, S. 20] nachlesen oder besser noch als Übungsaufgabe führen).

- Beispiel 0.13.** 1. Ein diskreter Raum, der wenigstens zwei Elemente besitzt, ist nicht zusammenhängend. In einem solchen Raum sind nur die einpunktigen Mengen und \emptyset zusammenhängend.
2. Der indiskrete Raum ist zusammenhängend, da er nur zwei offene Mengen besitzt, von denen eine leer ist.
3. Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind zusammenhängend, genauso wie \mathbb{R} selbst. Dies sind die einzigen nicht-leeren zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} . (Dies ist nicht offensichtlich; ein Beweis steht beispielsweise in [May89, Satz I.6.3, S. 57], er verwendet natürlich eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen, und zwar die Existenz eines Supremums einer nach oben beschränkten Teilmenge von \mathbb{R} .)

□

Satz 0.14. Für jeden topologischen Raum X sind äquivalent:

1. X ist zusammenhängend.
2. Die einzigen Teilmengen von X , die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, sind X und \emptyset .
3. Es gibt keine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum, der wenigstens zwei Punkte enthält.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Wir nehmen an, dass 2. nicht gilt. Nach der Definition einer Topologie sind \emptyset und X sowohl offen als auch abgeschlossen. Ist $U \subset X$ eine Teilmenge, die ebenfalls offen und abgeschlossen ist und für die $U \neq \emptyset$ und $U \neq X$ gilt, so ist $U \cap U^c = \emptyset$, $U \cup U^c = X$. X ist also nach Definition nicht zusammenhängend. Dann gilt aber 1. nicht.

2. \Rightarrow 3.: Wir nehmen an, dass 3. nicht gilt. Y sei ein diskreter Raum mit mindestens zwei Elementen und $f: X \rightarrow Y$ sei eine stetige surjektive Abbildung. Für jedes $y \in Y$ ist $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ und $f^{-1}(y) \neq X$, aber $f^{-1}(y)$ ist offen und abgeschlossen. Dann ist aber die Bedingung 2. nicht erfüllt.

3. \Rightarrow 1. Wir nehmen an, dass 1. nicht gilt. Dann gibt es nicht-leere Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$. Sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen und $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ 1, & x \in V. \end{cases}$$

f ist offensichtlich surjektiv und stetig, im Widerspruch zu 3. □

Die folgende Aussage ist eine triviale Konsequenz aus diesem Satz.

Korollar 0.15. Jede stetige Abbildung eines zusammenhängenden Raumes in einen diskreten Raum ist konstant.

Wir erwähnten schon, dass Wegzusammenhang eine stärkere Eigenschaft als Zusammenhang ist. Dies können wir jetzt beweisen:

Satz 0.16. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

Beweis. Es seien X ein wegzusammenhängender und X' ein diskreter Raum, $x_0 \in X$ und $f: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Für jedes $x \in X$ existiert ein Weg c in X mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x$. Die Abbildung $f \circ c: [0, 1] \rightarrow X'$, ist stetig und daher konstant nach dem obigen Korollar 0.15, da das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist. Es folgt: $f(x) = f(x_0)$ für jedes $x \in X$. Dann gibt es aber keine stetige, surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum, der wenigstens zwei Punkte enthält. Mit Satz 0.14 folgt die Behauptung. □

Tatsächlich muss, wie oben schon erwähnt, ein zusammenhängender Raum nicht wegzusammenhängend sein. Dies zeigt das weiter unten stehende Beispiel. Für dessen Verständnis benötigen wir zunächst aber noch ein paar Eigenschaften zusammenhängender Räume:

Satz 0.17. *Seien X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ mit $A \subset B \subset \overline{A}$. Ist A zusammenhängend, so auch B .*

—
Als Übung!

Beweis. — Angenommen, B ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $U, V \subset X$ offen mit $U \cap B \neq \emptyset$, $V \cap B \neq \emptyset$, $(U \cap B) \cup (V \cap B) = B$ und $(U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset$. Da $A \subset B$ ist $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$ und $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$. Weil $B \subset \overline{A}$ ist aber $A \cap U \neq \emptyset$ und $A \cap V \neq \emptyset$. Dann ist A aber nicht zusammenhängend. —| \square

Satz 0.18. *Gegeben sei eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen. Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

—
Als Übung!

Beweis. — Wäre $f(X)$ nicht zusammenhängend, so gäbe es nach Satz 0.14 eine stetige Surjektion $g: f(X) \rightarrow Z$ auf einen diskreten Raum Z , der wenigstens zwei Elemente enthält. Da $g \circ f: X \rightarrow Z$ ebenfalls stetig und surjektiv wäre, wäre X nicht zusammenhängend. —| \square

Mit dem bisher Gezeigten können wir nun den aus der Analysis in ähnlicher Form bekannten Zwischenwertsatz beweisen:

Satz 0.19 (Zwischenwertsatz). *X sei ein topologischer Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung. Ferner seien $a, b \in f(X)$ mit $a < b$. Ist X zusammenhängend, dann ist $[a, b] \subset f(X)$, d.h. f nimmt jeden Wert zwischen a und b an.*

—
Als Übung!

Beweis. — Mit X ist auch $f(X)$ nach Satz 0.18 zusammenhängend. Zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R} sind aber Intervalle (s. Beispiel 0.13). —| \square

Damit können wir nun zeigen, dass Wegzusammenhang eine stärkere Eigenschaft als Zusammenhang ist:

Beispiel 0.20. Wir betrachten die Menge (s. Abb. 0.5):

$$X := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Es gilt: $X = f(]0, \infty[)$ mit $f:]0, \infty[, x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x})$. X ist also stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge und daher nach Satz 0.18 selbst zusammenhängend. Die abgeschlossene Hülle \overline{X} von X in \mathbb{R}^2 ist die Vereinigung von X mit dem Intervall $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$:

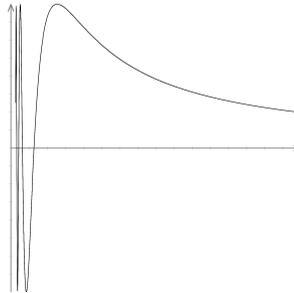


Abbildung 0.5. Ein nicht wegzusammenhängender Raum: Ist X die abgebildete Menge (der Graph von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$), so ist $\bar{X} = X \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ zwar zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

$$\bar{X} = X \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

\bar{X} ist nach Satz 0.17 auch zusammenhängend, weil X es ist.

Wir zeigen nun, dass \bar{X} aber nicht wegzusammenhängend ist. Wir nehmen dazu an, dass es einen Weg $c: [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ gibt mit $c(0) = (0, 0)$ und $c(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Diese Abbildung c ist also stetig; das ist aber genau dann der Fall, wenn $p_1 \circ c$ und $p_2 \circ c$ beide stetig sind, wobei p_i die Projektion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf die i -te Koordinate bezeichnet. $p_1 \circ c$ nimmt wegen des Zwischenwertsatzes 0.19 alle Werte zwischen 0 und $\frac{1}{\pi}$ an, also insbesondere auch die Werte $\frac{2}{(2n+1)\pi}$ für $n = 2, 3, \dots$. Daher nimmt $p_2 \circ c$ die Werte $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$ und somit in jeder Umgebung von 0 die Werte $+1$ und -1 an. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $[0, \delta[$ durch $p_2 \circ c$ ganz in $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ abgebildet wird. Alle offenen Umgebungen von 0 in $[0, \frac{1}{\pi}]$ haben aber die Form $[0, \delta[$. Damit ist c nach Definition in 0 nicht stetig und \bar{X} nicht wegzusammenhängend. \square

Häufig sind in der algebraischen Topologie solche feinen Unterschiede sehr relevant, beispielsweise bei der Frage der Existenz einer universellen Überlagerung (Satz 1.68 auf Seite 43).

Die Fundamentalgruppe

— 2. Vorlesung:
25. April '07 —

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes ist die erste Invariante, mit der wir einige der Homöomorphie-Fragen aus der Einführung beantworten können: insbesondere werden wir damit beweisen können, dass das Gebiet mit genau einem Loch nicht homöomorph zu jenem mit keinem oder jenem mit zwei Löchern ist.

Wir werden hier auch das wichtigste Hilfsmittel zur Berechnung der Fundamentalgruppen beweisen, den Satz von Seifert – van Kampen. Dieser führt die Berechnung der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes auf jene von Teilräumen zurück (deren Fundamentalgruppe dann hoffentlich leichter zu berechnen ist). Das wesentliche Hilfsmittel beim Beweis werden Überlagerungen sein; deren Theorie macht einen großen Teil dieses Kapitels aus.

Mit Hilfe des Satzes von Seifert – van Kampen werden wir beispielsweise die Fundamentalgruppen der n -Sphären und der ∞ -Figur ermitteln können.

1.1 Definition der Fundamentalgruppe und erste Beispiele

Definition 1.1. Seien $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit gleichem Anfangspunkt $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ und gleichem Endpunkt $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. α und β heißen **homotop**, in Zeichen: $\alpha \sim \beta$, wenn es eine stetige Abbildung

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit:

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \alpha(t), & H(1, t) &= \beta(t) \\ H(s, 0) &= x_0, & H(s, 1) &= x_1. \end{aligned}$$

H heißt **Homotopie**. $h_s: [0, 1] \rightarrow X$, $h_s(t) = H(s, t)$ ist eine Familie von Wegen (Abb. 1.1).

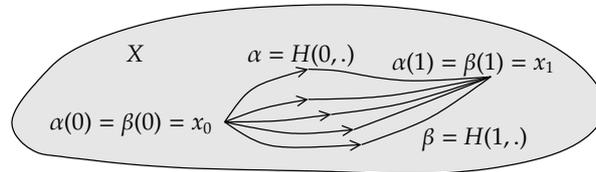


Abbildung 1.1. Homotopie von Wegen.

Beispiel 1.2. X sei ein topologischer Raum.

1. Seien α, β, γ Wege von x_0 nach x_1 , x_1 nach x_2 bzw. x_2 nach x_3 , $x_i \in X$. Dann sind $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$ homotope Wege von x_0 nach x_3 , in Zeichen:

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma).$$

Dies zeigt die Homotopie (s. Abb. 1.2):

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha((4 - 2s)t), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ \beta(4t - (s + 1)), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ \gamma((2 + 2s)t - (1 + 2s)), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

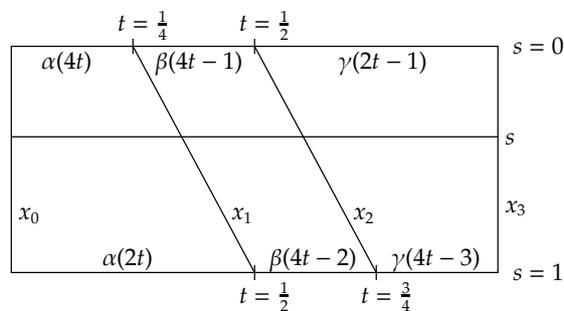


Abbildung 1.2. Assoziativität der Verknüpfung von Wegen.

2. Sei ε_{x_0} der konstante Weg mit Wert $x_0 \in X$ und sei $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ein beliebiger Weg mit $\alpha(0) = x_0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_{x_0} \sim \alpha * \alpha^{-1}.$$

Dies zeigt die Homotopie (s. Abb. 1.3):

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(1 - s) \\ \alpha(1 - s), & \frac{1}{2}(1 - s) \leq t \leq \frac{1}{2}(1 + s) \\ \alpha(2 - 2t), & \frac{1}{2}(1 + s) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

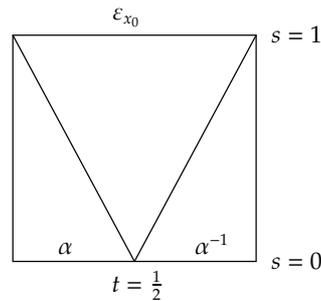


Abbildung 1.3. $\alpha * \alpha^{-1} \sim \varepsilon_{x_0}$, dem konstanten Weg.

□

Satz 1.3. Homotopie von Wegen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Nur die Transitivität ist nicht trivial. Seien dazu $\alpha, \beta, \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 . Es gelte $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, vermöge H_1 bzw. H_2 . Dann ist

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H_2(2s - 1, t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen α und γ .

□

Satz 1.4. Seien $\alpha_1, \alpha_2: [0, 1] \rightarrow X, \beta_1, \beta_2: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x_0, \alpha_1(1) = \alpha_2(1) = x_1$ und $\beta_1(0) = \beta_2(0) = x_1, \beta_1(1) = \beta_2(1) = x_2$. Gilt $\alpha_1 \sim \alpha_2$ und $\beta_1 \sim \beta_2$, so auch:

$$\alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 * \beta_2.$$

Beweis. — H_α und H_β seien die Homotopien zwischen α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 . Als Übung!

Dann ist

$$H(s, t) = \begin{cases} H_\alpha(s, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_\beta(s, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

die gesuchte Homotopie (s. Abb. 1.4). —

□

Satz/Definition 1.5. Seien X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ ein fester Punkt und $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ ein geschlossener Weg. Mit $[\alpha]$ bezeichnen wir die Homotopieklasse von α . Sei

$$\pi_1(X, x_0) = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0) \}$$

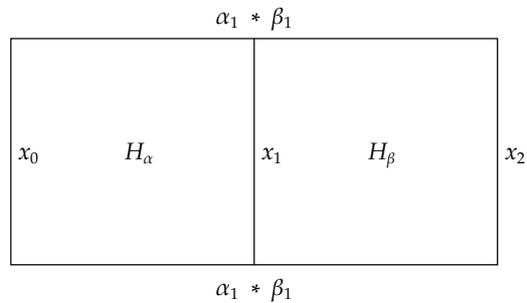


Abbildung 1.4. Verknüpfung homotoper Wege.

die Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen mit Anfangs- und Endpunkt x_0 . Vermöge

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

wird auf $\pi_1(X, x_0)$ eine wohldefinierte Verknüpfung erklärt. Dies gibt $\pi_1(X, x_0)$ die Struktur einer Gruppe mit neutralem Element $[\varepsilon_{x_0}]$.

$\pi_1(X, x_0)$ heißt **Fundamentalgruppe** von X mit **Basispunkt** x_0 .

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus dem obigen Satz 1.4. Die Assoziativität haben wir im Beispiel 1.2.1 gesehen. $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ haben wir im Beispiel 1.2.2 nachgerechnet.

Das neutrale Element der Gruppe ist $[\varepsilon_{x_0}]$, da $\varepsilon_{x_0} * \alpha \sim \alpha$ für jeden geschlossenen Weg α gilt, wie die folgende Homotopie zeigt (Abb. 1.5):

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha((2-s)t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2-s}, \\ x_0, & \frac{1}{2-s} \leq t. \end{cases}$$

□

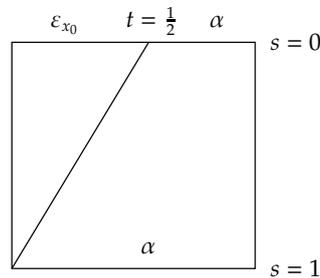


Abbildung 1.5. $[\varepsilon_{x_0}]$, das neutrale Element von $\pi_1(X, x_0)$.

Bemerkung 1.6. $\pi_1(X, x_0)$ ist im Allgemeinen keine kommutative Gruppe. Dies können wir hier noch nicht beweisen. Es sollte aber anschaulich einleuchten, wenn wir beispielsweise in $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ mit $(0, 0) \neq p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2, p_1 \neq p_2$, zwei Wege α_i mit dem Ursprung $x_0 := (0, 0)$ als Anfangs- und Endpunkt betrachten, die sich jeweils einmal um p_i winden. Anschaulich ist dann einsichtig (s. Abb. 1.6), dass gilt: $\alpha_1 * \alpha_1^{-1} * \alpha_2 * \alpha_2^{-1} \sim \varepsilon_{(0,0)} \neq \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} * \alpha_2^{-1}$. Mit dem Satz von Seifert – van Kampen (Abschnitt 1.5) wird es leicht sein, dies auch zu beweisen.

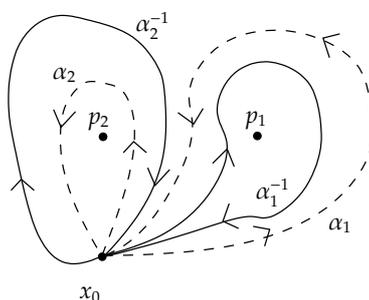


Abbildung 1.6. Dieses Beispiel verdeutlicht anschaulich die Nicht-Kommutativität von $\pi_1(X, x_0)$: Es gilt: $\alpha_1 * \alpha_1^{-1} * \alpha_2 * \alpha_2^{-1} \sim \varepsilon_{(0,0)} \neq \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_1^{-1} * \alpha_2^{-1}$.

Bevor wir unsere erste Fundamentalgruppe berechnen können, benötigen wir noch ein paar vorbereitende Sätze und Begriffe.

Satz/Definition 1.7. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$, dann induziert

$$[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus f_* mit

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Beweis. Ist H eine Homotopie in X , dann ist $f \circ H$ eine Homotopie in Y . \square

Zwei triviale Beispiele, die wir später verwenden werden:

Beispiel 1.8. 1. Sei $x_0 \in X$. $\text{id}_X: X \rightarrow X, x \mapsto x$ induziert $\text{id}_X: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), [\alpha] \mapsto [\alpha]$.

2. Sei $y_0 \in Y, g: X \rightarrow Y, g(x) = y_0 \forall x$. Dann gilt: $g_*[\alpha] = [g \circ \alpha] = [\varepsilon_{y_0}] \forall \alpha$. g_* ist also der triviale Gruppenhomomorphismus.

\square

Innerhalb einer Wegzusammenhangskomponente können wir den Basispunkt frei wählen, wie das folgende Resultat zeigt:

Satz/Definition 1.9. 1. Sind $x_0, x_1 \in X$ Punkte in der gleichen Wegzusammenhangskomponente und ist $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 , dann liefert

$$\pi_1(\gamma): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$$

einen Gruppenisomorphismus. Dieser hängt nur von $[\gamma]$ ab.

2. Ist $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ ein weiterer Weg von x_0 nach x_1 , dann ist $\pi_1(\delta)$ ein weiterer Isomorphismus, der sich von $\pi_1(\gamma)$ nur durch die Konjugation mit $\beta = [\gamma^{-1} * \delta]$ unterscheidet:

$$\pi_1(\delta)[\alpha] = [\gamma^{-1} * \delta]^{-1}(\pi_1(\gamma)[\alpha])[\gamma^{-1} * \delta].$$

Beweis. 1. $\pi_1(\gamma)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, da $\gamma * \gamma^{-1} \sim \varepsilon_{x_0}$ und wegen der Assoziativität: $\pi_1(\gamma)([\alpha] * [\beta]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] * [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] = \pi_1(\gamma)[\alpha] * \pi_1(\gamma)[\beta]$. Es ist ein Isomorphismus, weil $\pi_1(\gamma)^{-1} = \pi_1(\gamma^{-1})$.

2. Klar wegen Assoziativität. □

Definition 1.10. Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, in Zeichen $f_0 \simeq f_1$, falls es eine stetige Abbildung, genannt **Homotopie**, $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, so dass

$$H(x, 0) = f_0(x), H(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X.$$

Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Wir setzen $y_0 = f_0(x_0)$, $y_1 = f_1(x_0)$. Mit

$$\tau: [0, 1] \rightarrow Y, t \mapsto H(x_0, t)$$

bezeichnen wir den Weg von y_0 nach y_1 .

Satz/Definition 1.11. Mit der Notation aus der vorigen Definition gilt, dass das folgende **Diagramm kommutiert**:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, y_0) \\ & \nearrow^{f_{0*}} & \downarrow \pi_1(\tau) \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_1) \\ & \searrow_{f_{1*}} & \end{array}$$

d.h.: $f_{1*}([\alpha]) = (\pi_1(\tau))(f_{0*}([\alpha])) \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ ein geschlossener Weg. Wir müssen eine Homotopie zwischen den Wegen $\tau^{-1} * (f_0 \circ \alpha) * \tau$ und $f_1 \circ \alpha$ konstruieren. Dazu betrachten wir $h(t, s) := H(\alpha(t), s)$. Mit dieser Notation gilt: $h(t, 0) = (f_0 \circ \alpha)(t)$ und $h(t, 1) = (f_1 \circ \alpha)(t)$. Die Abbildung 1.7 liefert nun die gesuchte Homotopie. \square

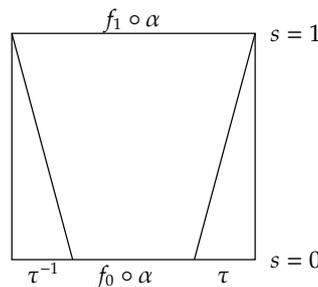


Abbildung 1.7. Eine Homotopie zwischen $\tau^{-1} * (f_0 \circ \alpha) * \tau$ und $f_1 \circ \alpha$.

Korollar 1.12. Sind $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen mit $H(x_0, t) = y_0 \forall t$, dann ist $(f_0)_* = (f_1)_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f_0(x_0) = H(x_0, 0) = y_0 = H(x_0, 1) = f_1(x_0)$. τ ist also der konstante Weg ε_{y_0} . Damit ist $\pi_1(\tau): \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\alpha] \mapsto [\tau^{-1} \alpha \tau] = [\alpha]$ die Identität. \square

— 3. Vorlesung:
2. Mai '07 —

Beispiel 1.13. Wir betrachten \mathbb{R}^n und darauf die Abbildungen $f_1 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $f_0 \equiv 0$. f_1 und f_0 sind homotop vermöge $H(x, t) = x \cdot t$ und $H(0, t) = 0 \forall t$. Es folgt mit Korollar 1.12: $\text{id}_{\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)} = (f_1)_* = (f_0)_* = \text{trivialer Gruppenhomomorphismus}$. Damit gilt aber: $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 1$. \square

Einige spezielle Homotopien bekommen eigene Namen:

Definition 1.14. 1. Ist A eine Teilmenge von X und gilt für die stetigen Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$, dass $f|_A = g|_A$, so heißt f zu g **homotop relativ A** , in Zeichen $f \simeq g \text{ rel } A$, wenn es eine Homotopie G von f nach g gibt, so dass für alle $a \in A$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$G(a, t) = f(a) = g(a).$$

2. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. $i: A \rightarrow X$ bezeichne die Inklusionsabbildung. Eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$ heißt eine **Retraktion**. A heißt **Retrakt** von X , wenn es eine Retraktion von X auf A gibt. A heißt **Deformationsretrakt** von X , wenn es eine Retraktion r von X auf A gibt mit $i \circ r \simeq \text{id}_X$. A heißt **starker Deformationsretrakt** von X , wenn es eine Retraktion von X auf A gibt mit $i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$. X heißt **zusammenziehbar**, wenn X einen seiner Punkte als Deformationsretrakt besitzt.

Beispiel 1.15. 1. \mathbb{R}^n ist also auf jeden seiner Punkte zusammenziehbar (siehe Bsp. 1.13).

2. Die Einheits-Sphäre S^{n-1} ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: Die Inklusion $i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist definiert durch $i(x) = x$. Für die Abbildung $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$, definiert durch $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, gilt: $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$. Wir definieren eine Homotopie F von $i \circ r$ zur Identität $\text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ durch: $F(x, t) = (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + tx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t \in [0, 1]$. Diese lässt offenbar die Sphäre S^{n-1} punktweise fest.

□

1.2 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Wir haben eben unsere erste Fundamentalgruppe ausgerechnet. Im Allgemeinen ist dies nicht so einfach. In den folgenden Abschnitten stellen wir Hilfsmittel bereit, um Fundamentalgruppen auszurechnen. Einige der wesentlichen Ideen, die wir dabei verwenden werden, tauchen bereits bei der Berechnung der Fundamentalgruppe des Einheitskreises auf. Außerdem hat deren Berechnung einige interessante Anwendungen. Daher nehmen wir uns die Zeit, dieses Beispiel zu betrachten, obwohl wir das Resultat später als einfache Folgerung allgemeiner Sätze erhalten werden. In diesem Abschnitt folgen wir der Darstellung in [May89, II.§3].

1.2.1 Berechnung der Fundamentalgruppe

Satz 1.16. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Diese Aussage ist keineswegs trivial. Wir machen zunächst einige Vorbemerkungen und behandeln dann zwei Hilfssätze, die wir für den Beweis des Satzes benötigen.

Wir betrachten die Abbildung:

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow S^1, \Phi(t) = e^{2\pi it}.$$

Als aus der Analysis bekannt setzen wir voraus, dass dies ein stetiger surjektiver Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ auf (S^1, \cdot) mit $\text{Ker } \Phi = \mathbb{Z}$ ist und dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Einschränkung $\Phi|_{]a, a+1[}$ ein Homöomorphismus von $]a, a+1[$ auf $S^1 \setminus \{\Phi(a)\}$ ist. Mit

$$\Psi: S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

bezeichnen wir die Umkehrabbildung von $\Phi|_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}$.

Ferner setzen wir als aus der Analysis bekannt voraus (s. auch [May89]), dass eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen mit Metriken d bzw. e gleichmäßig stetig ist, falls ihr Definitionsbereich X kompakt ist. f heißt dabei **gleichmäßig stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt: $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$, und ein topologischer Raum X ist **kompakt**, falls X hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Damit können wir zeigen:

Lemma 1.17. $c: [0, 1] \rightarrow S^1$ sei ein Weg mit $c(0) = 1$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{c}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}(0) = 0$ und $\Phi \circ \tilde{c} = c$ (s. Abb. 1.8).

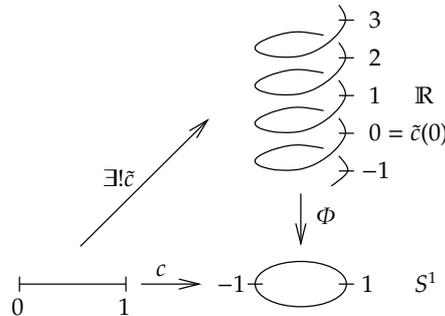


Abbildung 1.8. Liftung eines Weges in der S^1 mit $c(0) = 1$.

Beweis. Wir zerlegen den Weg c in kleine Abschnitte, die man eindeutig mittels Ψ nach \mathbb{R} hochheben kann; dort kleben wir sie wieder aneinander. c ist stetig und daher auch gleichmäßig stetig als stetige Abbildung mit kompaktem Definitionsbereich $[0, 1]$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $t, t' \in [0, 1]$ mit $|t - t'| < \varepsilon$ gilt: $|c(t) - c(t')| < 1$. Damit ist insbesondere $c(t') \neq -c(t)$ und $\Psi(c(t')/c(t))$ ist definiert. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Wir definieren \tilde{c} durch:

$$\tilde{c}(t) = \Psi\left(\frac{c(t)}{c\left(\frac{N-1}{N}t\right)}\right) + \Psi\left(\frac{c\left(\frac{N-1}{N}t\right)}{c\left(\frac{N-2}{N}t\right)}\right) + \dots + \Psi\left(\frac{c\left(\frac{1}{N}t\right)}{c(0)}\right).$$

\tilde{c} ist stetig, $(\Phi \circ \tilde{c})(t) = c(t)$ und $\tilde{c}(0) = \Psi(1) \cdot N = 0 \cdot N = 0$.

Ist c' ein zweiter Weg in \mathbb{R} mit den geforderten Eigenschaften, so ist $\tilde{c} - c': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\Phi \circ (\tilde{c} - c') = c/c = 1$. Daher ist $\tilde{c} - c'$ eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach \mathbb{Z} und wegen 0.15 konstant. Da $\tilde{c}(0) - c'(0) = 0$ ist, ist also $\tilde{c} - c' = 0$ und damit $\tilde{c} = c$. \square

Jeder Weg in S^1 mit Anfangspunkt 1 lässt sich also auf genau eine Weise zu einem Weg in \mathbb{R} mit Anfangswert 0 anheben. Wenn $c(1) = 1$ ist, dann ist

$\tilde{c}(1)$ eine ganze Zahl und diese ganze Zahl ist nach dem Lemma eindeutig bestimmt.

Das folgende Lemma sagt nun, dass sich jede Homotopie von Wegen in $S^1 \text{ rel } \{0, 1\}$ auf genau eine Weise zu einer Homotopie $\text{rel } \{0, 1\}$ der angehobenen Wege hochheben lässt. Insbesondere hängt der Endpunkt des hochgehobenen Weges nur von der Homotopieklasse $\text{rel } \{0, 1\}$ des ursprünglichen Weges ab. Der Beweis dieses Lemmas ist analog zum eben durchgeführten; er findet sich beispielsweise in [May89, Hilfssatz II.3.3, S. 84].

Lemma 1.18. $c, d: [0, 1] \rightarrow S^1$ seien Wege mit $c(0) = d(0) = 1$ und $c \simeq d \text{ rel } \{0, 1\}$ vermöge einer Homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi \circ \tilde{H} = H$ und \tilde{H} ist eine Homotopie $\text{rel } \{0, 1\}$ von \tilde{c} nach \tilde{d} .

Endlich können wir die Fundamentalgruppe des Kreises bestimmen:

Beweis (von Satz 1.16). Wir geben einen Isomorphismus $\chi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ an: $\chi([c]) = \tilde{c}(1)$. Diese Abbildung ist nach den beiden Lemmata wohldefiniert. Wir zeigen, dass sie ein Homomorphismus ist, der surjektiv und injektiv ist.

χ ist ein Homomorphismus: Es seien c, d geschlossene Wege in S^1 mit Anfangspunkt 1. Dann ist:

$$\widetilde{c * d} = \tilde{c} * (\tilde{c}(1) + \tilde{d}), \quad (1.1)$$

denn $\Phi \circ \widetilde{c * d} = c * d$ und $\Phi \circ \tilde{c} * (\tilde{c}(1) + \tilde{d}) = c * d$. Die letzte Gleichheit sieht man dabei folgendermaßen: Für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\Phi \circ \tilde{c} * (\tilde{c}(1) + \tilde{d})(t) = \begin{cases} \Phi(\tilde{c}(2t)) = c(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Phi(\tilde{c}(1) + \tilde{d}(2t - 1)), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist aber $\Phi(\tilde{c}(1) + \tilde{d}(2t - 1)) = 1 \cdot \Phi(\tilde{d}(2t - 1)) = d(2t - 1)$. Daher gilt (1.1), da die Anhebung eindeutig ist nach den Lemmata. Somit folgt: $c * d(1) = \tilde{c}(1) + \tilde{d}(1)$ und schließlich:

$$\chi([c][d]) = \chi([c]) + \chi([d]).$$

χ ist surjektiv: Für $m \in \mathbb{Z}$ definieren wir $c_m: [0, 1] \rightarrow S^1$ durch $c_m(t) = \Phi(mt)$. Dann ist offenbar $\chi([c_m]) = \tilde{c}_m(1) = m$ und somit χ surjektiv.

χ ist injektiv: Wir zeigen, dass der Kern von χ trivial ist: Es sei dazu c ein geschlossener Weg in S^1 mit Anfangspunkt 1 und $\chi([c]) = \tilde{c}(1) = 0$. Dann ist \tilde{c} ein geschlossener Weg in \mathbb{R} , $\tilde{c}(0) = \tilde{c}(1) = 0$. In \mathbb{R} ist \tilde{c} homotop zum konstanten Weg $0 \text{ rel } \{0, 1\}$ vermöge der Homotopie $H(t, s) = (1 - s)\tilde{c}(t)$. Dann ist $\Phi \circ H$ eine Homotopie $\text{rel } \{0, 1\}$ von c zum konstanten Weg ε_1 und $[c] = [\varepsilon_1]$.

χ ist also ein Isomorphismus. □

1.2.2 Die Umlaufzahl

Eine nützliche Anwendung des obigen Satzes und seines Beweises, ist die Definition der Umlaufzahl. Diese Invariante ordnet jeder geschlossenen Kurve c in \mathbb{C} und jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ der nicht auf c liegt, eine ganze Zahl, die **Umlaufzahl** $\text{Uml}(c, a)$ zu, die anschaulich zählt, wie oft die Kurve den Punkt a in positiver Richtung umläuft (s. Abb. 1.9).

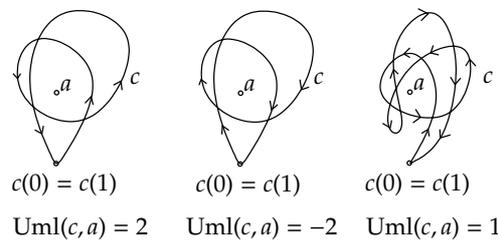


Abbildung 1.9. Eine anschauliche Erläuterung der Umlaufzahl.

Die exakte Definition sieht ein wenig umständlich aus:

Satz/Definition 1.19. Seien $a \in \mathbb{C}$ und c ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Die **Umlaufzahl** von c um a ist definiert durch

$$\text{Uml}(c, a) := \chi \circ \alpha_h \circ \pi_1(r_a)([c]),$$

wobei $\chi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus dem Beweis zu 1.16 ist, $r_a: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow S^1$ definiert ist durch $r_a(z) = \frac{z-a}{|z-a|}$ und $\alpha_h: \pi_1(S^1, r_a \circ c(0)) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ der eindeutig bestimmte Isomorphismus, der durch einen beliebigen Weg h in S^1 von 1 nach $(r_a \circ c)(0)$ gegeben wird.

Die Eindeutigkeit des Isomorphismus ist hierbei nicht schwer zu zeigen. Das Konzept der Umlaufzahl kommt in vielen Bereichen der Mathematik vor, beispielsweise in der komplexen Analysis. Im folgenden Abschnitt geben wir eine Anwendung auf einen der wichtigsten Sätze der Algebra.

1.2.3 Eine Anwendung

Als interessante Anwendung der Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises außerhalb der Topologie erhält man mit Hilfe der Umlaufzahl einen schönen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra. Dafür benötigen wir allerdings zunächst noch einige Fakten zur Umlaufzahl, die wir alle beweisen könnten, wenn wir ein klein wenig mehr Zeit hätten. Da dies leider nicht

der Fall ist, verbleiben diese als Übungsaufgaben, genauso wie deren Veranschaulichung. Letztere ist sicherlich für das Verständnis der Aussagen sehr hilfreich.

Satz 1.20. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $c, d: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ geschlossene Wege. Ferner sei $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ eine Homotopie von c nach d , so dass für alle $s \in [0, 1]$ gilt: $H(0, s) = c(s)$ und $H(1, s) = d(s)$ (d.h. H_s ist ein geschlossener Weg). Dann gilt:

$$\text{Uml}(c, a) = \text{Uml}(d, a).$$

—
Als Übung!
—

Beweis. — Siehe [May89, Satz II.3.8]. — □

Satz 1.21 (von Rouché). Sei $a \in \mathbb{C}$ und seien $c, d: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ geschlossene Wege. Wenn für alle $t \in [0, 1]$ gilt, dass

$$|c(t) - d(t)| < |c(t) - a|,$$

so ist

$$\text{Uml}(c, a) = \text{Uml}(d, a).$$

—
Als Übung!
—

Beweis. — Eine Veranschaulichung der Aussage dieses Satzes ist in Abb. 1.10 zu sehen. Zum Beweis (aus [May89, S. 85]) benutzen wir den vorigen Satz 1.20, indem wir eine Homotopie H von c nach d angeben:

$$H(s, t) = (1 - t)c(s) + td(s).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |H(s, t) - a| &= |(1 - t)c(s) + td(s) - a| \\ &= |c(s) - a - t(c(s) - d(s))| \\ &\geq |c(s) - a| - t|c(s) - d(s)| > 0, \end{aligned}$$

also: $H(I \times I) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$. — □

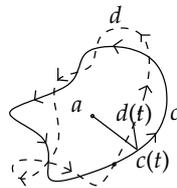


Abbildung 1.10. Zum Satz von Rouché.

Satz 1.22. Sei $f: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ der Weg mit $c(t) = f(e^{2\pi it})$. Ferner sei $a \in \mathbb{C} \setminus c([0, 1])$ ein Punkt, der nicht auf dem Weg liegt. Es gilt:

$$\text{Uml}(c, a) \neq 0 \Rightarrow a \in f(D^2).$$

Beweis. — (Siehe [May89, S. 86].) Ist $a \notin f(D^2)$, so ist $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$, Als Übung!
 $H(t, s) = f(s \cdot e^{2\pi it})$ eine Homotopie von c zur konstanten Abbildung. Für alle
 $s \in [0, 1]$ ist $H(0, s) = H(1, s)$. Mit Satz 1.20 folgt: $\text{Uml}(c, a) = 0$. — \square —

Mit den obigen Hilfssätzen können wir schließlich den angekündigten Satz beweisen:

Satz 1.23 (Fundamentalsatz der Algebra). *In \mathbb{C} besitzt jedes Polynom*

$$p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

mit $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle.

Beweis. Siehe [vBL06, Tür 22] für eine Animation, die diesen Beweis veranschaulicht. Für $z \neq 0$ gilt:

$$|z^k - p(z)| = |a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_0| = |z^k| \cdot \left| \frac{a_{k-1}}{z} + \frac{a_{k-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^k} \right|.$$

Für ein $r > |a_{k-1}| + \cdots + |a_0| + 1$ definieren wir den Weg $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $c(t) = r \cdot e^{2\pi it}$. Dann gilt:

$$|c(t)^k - p(c(t))| < |c(t)^k| \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Nach dem Satz von Rouché gilt demnach: $\text{Uml}(p \circ c, 0) = \text{Uml}(c^k, 0)$, aber $\text{Uml}(c^k, 0) = k \neq 0$. Daher können wir Satz 1.22 auf die Abbildung $f: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = p(rz)$ anwenden und erhalten, da demnach $0 \in f(D^2)$, schließlich ein $a \in D^2$ mit $f(a) = 0$. Dann gibt es aber ein $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| \leq r$ und $p(b) = 0$. \square

1.3 Überlagerungen und Liftungen

— 4. Vorlesung:
9. Mai '07 —

Ohne es explizit zu erwähnen, haben wir bereits bei der Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises Überlagerungen benutzt. Wir geben in diesem Abschnitt nun eine allgemeine Darstellung dieses Konzeptes, das uns viele Berechnungen von Fundamentalgruppen stark vereinfachen wird.

Definition 1.24. *Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $p: Y \rightarrow X$ heißt **Überlagerung** von X , wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $N \subset X$ besitzt, so dass $p^{-1}(N)$ disjunkte Vereinigung von offenen Mengen ist, die vermöge p homöomorph auf N abgebildet werden. $N \subset X$ heißt **Überlagerungsumgebung**. Für $x \in X$ heißt das Urbild $p^{-1}(x)$ **Faser** von x . Da eine Überlagerung insbesondere surjektiv ist, ist keine Faser leer.*

Beispiel/Definition 1.25. 1. Eine Überlagerung des Kreises S^1 durch \mathbb{R} (siehe Abb. 1.11, links):

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

2. Eine Überlagerung mit $Y = X \times T$, T diskret, heißt **triviale Überlagerung** (siehe Abb. 1.11, rechts).

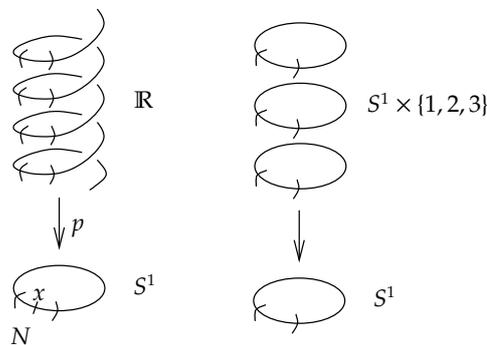
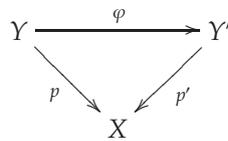


Abbildung 1.11. Überlagerung des Kreises S^1 durch \mathbb{R} (links) und eine triviale Überlagerung (rechts).

3. $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$.

□

Definition 1.26. Ein Isomorphismus zwischen zwei Überlagerungen (auch: Überlagerungsisomorphismus) $Y \xrightarrow{p} X, Y' \xrightarrow{p'} X$ ist ein kommutatives Diagramm



wobei φ ein Homöomorphismus ist.

Ist $p^{-1}(x)$ endlich, dann heißt $\#p^{-1}(x)$ die **Blätterzahl**. Für zusammenhänges X ist die Blätterzahl offenbar wohldefiniert (Abb. 1.12).

Beispiel 1.27. Für eine Überlagerungsumgebung $N \subset X$ ist $p^{-1}(N) \rightarrow N$ zu einer trivialen Überlagerung isomorph. □

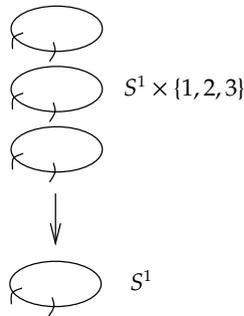
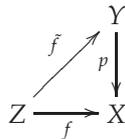


Abbildung 1.12. Eine Überlagerung mit Blätterzahl 3.

Definition 1.28. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Eine **Liftung** (auch: **Hochhebung**) von f ist eine stetige Abbildung $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$, so dass das Diagramm



kommutiert.

Unter gewissen Voraussetzungen können wir die Eindeutigkeit solcher Liftungen beweisen und manchmal auch deren Existenz. Damit beschäftigt sich der Rest dieses Abschnittes.

Satz 1.29 (Eindeutigkeit der Liftung). Seien $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit einem zusammenhängenden Raum Z . Seien ferner $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Z \rightarrow Y$ Liftungen. Dann gilt:

$$\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0) \text{ für einen Punkt } z_0 \in Z \Rightarrow \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \forall z \in Z.$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Mengen

$$M_{=} := \{ z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \} \quad \text{und} \quad M_{\neq} := \{ z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \}$$

beide offen sind. Dann folgt die Behauptung, da Z zusammenhängend und die erste Menge nicht leer ist.

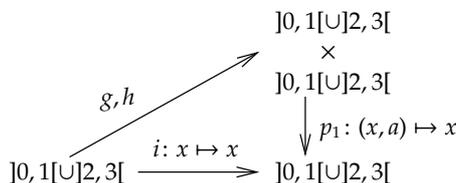
Sei nun $z \in Z$ und sei W eine Überlagerungsumgebung von $x = f(z) \in X$. Mit \tilde{W}_i bezeichnen wir das Blatt über W , das $\tilde{f}_i(z)$ enthält, $i = 1, 2$. Dann ist $U := \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{W}_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{W}_2) \subset Z$ eine offene Umgebung von z in Z .

Ist nun $z \in M_=$, dann gilt $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_2$ nach Definition einer Überlagerung und daher $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \forall z \in U$. Ist andererseits $z \in M_\neq$, so gilt nach Definition einer Überlagerung nun $\tilde{W}_1 \cap \tilde{W}_2 = \emptyset$ und daher $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \forall z \in U$.

In beiden Fällen haben wir also eine offene Umgebung von $z \in Z$ gefunden, die entweder ganz in $M_=$ oder ganz in M_\neq enthalten ist. Somit sind beide Mengen offen. \square

Beispiel 1.30. Es ist nicht schwer, ein Beispiel für eine nicht eindeutige Lif-
 — tung anzugeben. — Wir betrachten das Diagramm

—
 Als Übung!



Die Abbildungen g und h mit

$$g(x) = \begin{cases} (x, 0), & \text{falls } x \in]0, 1[, \\ (x, 0), & \text{falls } x \in]2, 3[, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} (x, 0), & \text{falls } x \in]0, 1[, \\ (x, 1), & \text{falls } x \in]2, 3[, \end{cases}$$

sind verschiedene Lif-
 — tungen von i , obwohl sie in einem Punkt übereinstimmen: $g(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2})$. — \square

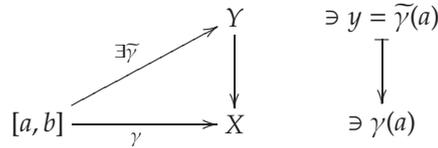
Häufig ist das folgende Lemma hilfreich (das in vielen Fällen bereits in der Analysis bewiesen wird). Wir werden es verwenden, um die Existenz gewisser Lif-
 — tungen zeigen zu können.

Lemma 1.31 (von Lebesgue). Gegeben sei eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes K . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass jede Teilmenge von K , die vom Durchmesser kleiner als ε ist, enthalten ist in einer der Mengen der offenen Überdeckung.

—
 Als Übung!

Beweis. — Falls nicht, gibt es für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ eine Teilmenge A_n von K mit Durchmesser kleiner als $\frac{1}{n}$ und nicht enthalten in einer offenen Menge der Überdeckung. Da K kompakt ist, gibt es einen Punkt P , so dass jede Umgebung von P die Menge A_n trifft für unendlich viele n . Sei U eine offene Menge der Überdeckung, die P beinhaltet, und sei $r > 0$, so dass $\overset{\circ}{B}_r(P) \subset U$. Es gibt unendlich viele n mit $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, so dass $A_n \cap \overset{\circ}{B}_{r/2}(P) \neq \emptyset$. Aber $A_n \subset U$, ein Widerspruch. — \square

Satz 1.32 (Pfadliftung). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, und $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ ein Weg. Sei $y \in Y$ ein Punkt mit $p(y) = \gamma(a)$. Dann existiert genau eine Lif-
 — tung $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow Y$ mit $\tilde{\gamma}(a) = y$:



Beweis. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus Satz 1.29. Um die Existenz einzusehen, betrachten wir die Überdeckung $\{U_i \mid U_i \text{ Überlagerungsumgebung von } X\}$ und die induzierte Überdeckung $\{\gamma^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ des kompakten Intervalls $[a, b]$. Nach dem Lemma von Lebesgue existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, so dass $[t_j, t_{j+1}] \subset \gamma^{-1}(U_j)$ für ein (von i abh.) j .

Vermöge der lokalen Umkehrung von $p|_{\tilde{U}_0}: \tilde{U}_0 \rightarrow U_0$, wobei $\tilde{U}_0 \ni y$, lässt sich $\gamma|_{[t_0, t_1]} \rightarrow X$ zu $\tilde{\gamma}: [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{U}_0$ liften mit $\gamma(t_0) = y; \tilde{\gamma}(t_1) = y_1$. Analog lässt sich $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ liften. Sukzessive erhalten wir Liftungen $\tilde{\gamma}: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow Y$ und schließlich $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow Y$. \square

Satz 1.33 (Homotopieliftung). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow X$ eine Homotopie von Wegen. Sei $\gamma_0(t) = H(0, t)$ der Ausgangsweg und $\tilde{\gamma}_0$ eine Liftung von γ_0 . Dann gibt es genau eine Liftung

$$\tilde{H}: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow Y$$

mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(0, t) = \tilde{\gamma}_0(t)$.

Beweis. — Analog zum Beweis der Pfadliftung. Nach dem Lemma von Lebesgue existiert eine Unterteilung in Rechtecke, so dass jedes $H(\text{Rechteck})$ in einer Überlagerungsumgebung liegt. Wir liften sukzessive. Die Stetigkeit von \tilde{H} ergibt sich aus der Eindeutigkeit. — \square

— Als Übung! —

Korollar 1.34. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $y_0 \in Y$ ein Basispunkt. Wir setzen $x_0 = p(y_0)$. Dann ist der Gruppenhomomorphismus $p_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.

Beweis. Sei $\alpha \in \Omega(Y, y_0)$ ein geschlossener Weg in Y . Angenommen $p \circ \alpha \sim \varepsilon_{x_0}$. Dann müssen wir zeigen, dass schon $\alpha \sim \varepsilon_{y_0}$ gilt. Sei dazu $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen $p \circ \alpha$ und ε_{x_0} . Sei \tilde{H} eine Liftung mit $\tilde{H}(0, t) = \alpha(t)$. Dann ist \tilde{H} eine Homotopie zwischen α und ε_{y_0} , da $\tilde{H}(1, t) = y_0$ und $p \circ \tilde{H}(1, t) = x_0$. \square

Satz 1.35 (Eindeutigkeit des Endpunktes). Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Seien ferner $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ Wege mit gleichem Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 . Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Notwendig und hinreichend dafür, dass die Endpunkte $\tilde{\alpha}(1), \tilde{\beta}(1)$ zweier Liftungen, die den gleichen Anfangspunkt y_0 haben, übereinstimmen, ist:

$$[\alpha * \beta^{-1}] \in p_* \pi_1(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0).$$

Beweis. Die Notwendigkeit ist einfach. Ist nämlich $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$, dann ist $[\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}] \in \pi_1(Y, y_0)$ und daher:

$$p_*[\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}] = [\alpha * \beta^{-1}] \in p_*\pi_1(Y, y_0).$$

—
Als Übung!

— Umgekehrt gilt: $\alpha * \beta^{-1} \sim p_* \circ \gamma$ für einen geschlossenen Weg γ vermöge einer Homotopie H . Dann liefert Homotopieliftung ein $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\tilde{H}(0, \cdot) = \gamma$. Die Eindeutigkeit dieser Liftung ergibt: $\tilde{H}(1, \cdot) = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}$, insbesondere:

$$\tilde{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

— —| □

Wir haben jetzt alle grundlegenden Eigenschaften von Überlagerungen und Liftungen — insbesondere deren Eindeutigkeit und die Existenz von Pfad- und Homotopie-Liftungen — bewiesen, so dass wir diese Konzepte im folgenden Abschnitt anwenden können.

1.4 Decktransformationen und Universelle Überlagerung

— 5. Vorlesung:
16. Mai '07 —

Viele Überlagerungen entstehen aus Quotientenbildung nach einer Gruppenoperation. Da diese im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen, führen wir zunächst kurz in dieses Konzept ein, bevor wir es danach auf Decktransformationen anwenden, um einige weitere Fundamentalgruppen berechnen zu können.

1.4.1 Gruppenoperationen

Definition 1.36. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und sei Y ein topologischer Raum. Eine **Operation** von G auf Y ist eine Abbildung

$$G \times Y \rightarrow Y, (g, y) \mapsto g.y$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $g.(h.y) = (gh).y \forall g, h \in G, y \in Y$,
2. $e.y = y \forall y \in Y$,
3. $Y \rightarrow Y, y \mapsto g.y$ ist stetig $\forall g \in G$.

Bemerkung 1.37. Dann ist also $Y \rightarrow Y, y \mapsto g.y$ ein Homöomorphismus, denn $y \mapsto g^{-1}.y$ ist die stetige Umkehrabbildung, da $g^{-1}(g.y) = (g^{-1}g).y = e.y = y$.

Definition 1.38. Die Menge

$$G.y := \{g.y \mid g \in G\}$$

heißt **Orbit** oder **Bahn** von y unter G . Die Menge der Orbits (oder Bahnen) bezeichnen wir mit $X := Y/G$.

Die **natürliche Quotientenabbildung** $p: Y \rightarrow Y/G$ ist stetig, wenn wir Y/G die **Quotiententopologie** geben, d.h.:

$$V \subset Y/G \text{ offen} : \iff p^{-1}(V) \subset Y \text{ offen} .$$

Satz 1.39. Sei $G \times Y \rightarrow Y$ eine Operation auf einem topologischen Raum Y . $p: Y \rightarrow Y/G$ ist eine Überlagerung genau dann, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass $g.V \cap V = \emptyset \forall g \in G \setminus \{e\}$.

Beweis. Sei zunächst $g.V \cap V = \emptyset \forall g \neq e$ und sei $N := p(V)$. Dann gilt:

$$p^{-1}(N) = \bigcup_{g \in G} g.V$$

ist offen als Vereinigung offener Mengen (die Vereinigung ist disjunkt, da aus der Voraussetzung folgt, dass $g.V \cap g'.V = \emptyset$, falls $g \neq g'$). Also: N ist offen in $X = Y/G$ und N ist eine Überlagerungsumgebung von $x := G.y (= p(y))$.

Umgekehrt sei $Y \rightarrow Y/G$ eine Überlagerung. Zu $y \in Y$ betrachten wir eine Überlagerungsumgebung N von $p(y) = x$. Sei $V \subset p^{-1}(N)$ eine Komponente mit $y \in V$. Dann gilt:

$$p^{-1}(N) = \bigcup_{g \in G} g.V$$

und $g.V \cap V = \emptyset$ für $g \neq e$, da $V \rightarrow N$ bijektiv ist (und also $G.y \cap G.y' = \emptyset$ für $y \neq y' \in V$ und damit $G.y \ni g.y \neq y' = e.y' \in G.y'$). □

Dies motiviert die folgende Begriffsbildung:

Definition 1.40. Eine Gruppenoperation $G \times Y \rightarrow Y$ heißt **lokal einfach** (auch: **eigentlich diskontinuierlich**), wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt mit $V \cap g.V = \emptyset \forall g \in G \setminus \{e\}$.

Definition 1.41. Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt **treu**, wenn aus $g.x = x \forall x \in X$ folgt: $g = e$. Sie heißt **frei** oder **fixpunktfrei**, wenn schon aus $g.x = x$ für ein $x \in X$ folgt: $g = e$ (d.h. für $e \neq g \in G$ hat der Homöomorphismus $X \rightarrow X, x \mapsto g.x$ keinen Fixpunkt).

Bemerkung 1.42. 1. Eine lokal einfache Operation ist insbesondere frei, denn: — —
für jedes $y \in Y$ und $e \neq g \in G$ folgt: $y \neq g.y$ —|. Als Übung!
— —

2. Der Beweis von Satz 1.39 zeigt, dass die Blätterzahl der Überlagerung, die aus der lokal einfachen Operation einer Gruppe G entsteht, gerade die Mächtigkeit $|G|$ dieser Gruppe ist.

Beispiel/Definition 1.43. 1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ operiert durch Translation: $(n, x) \mapsto x + n$. Zu $x \in \mathbb{R}$ ist $V =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, eine Umgebung, die zeigt, dass die Operation lokal einfach ist. Es gilt:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1 \text{ vermöge } x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x).$$

2. $\mu_n :=$ Gruppe der n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C}^* . μ_n operiert auf \mathbb{C}^* lokal einfach durch Multiplikation. Es gilt:

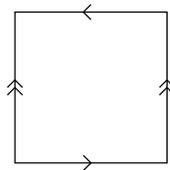
$$\mathbb{C}^*/\mu_n \approx \mathbb{C}^*.$$

Die Quotientenabbildung ist: $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$.

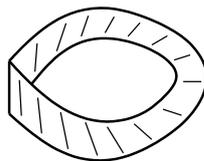
3. $G = (\{\pm 1\}, \cdot)$ operiert lokal einfach auf S^n . Der **projektive Raum** ist:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n := S^n/\{\pm 1\} = \{ \text{Menge der Ursprungsgeraden im } \mathbb{R}^{n+1} \}.$$

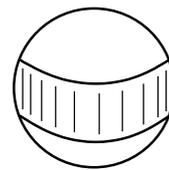
Speziell: $S^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Wir können das **Möbiusband** als Teilmenge des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ erkennen mit: $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \text{Möbiusband} \cup \text{Kreisscheibe}$. Das Möbiusband ist hierbei der topologische Raum, der entsteht, indem wir zwei gegenüberliegende Seiten des kompakten Einheitsquadrates entsprechend der Abbildung 1.13 identifizieren.



Das Einheitsquadrat.



Das Möbiusband.



Die Sphäre S^2 .

Abbildung 1.13. Das Möbiusband als Bild des Einheitsquadrats und als Teil des $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ unter der Überlagerung $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

4. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$, der sogenannte **Torus**. Die Abbildung 1.14 zeigt hierbei nur eines der Gitterquadrate der Ebene, deren Projektion zum Torus identifiziert werden kann (jeweils gegenüberliegende Seiten verkleben).
5. Die Operation auf \mathbb{R}^2 , erzeugt von

$$\alpha: (x, y) \mapsto (x + 1, y) \text{ und } \beta: (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$$

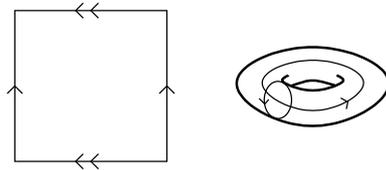


Abbildung 1.14. Der Torus als Bild des Einheitsquadrats.

ist lokal einfach. $\mathbb{R}^2 / \langle \alpha, \beta \rangle$ ist kompakt, und zwar das Bild des Einheitsquadrates, bei dem gegenüberliegende Seiten wie in Abb. 1.15 angegeben verklebt werden. Der Quotient ist die **Kleinsche Flasche**, eine Vereinigung zweier Möbiusbänder (siehe [vBL06]).

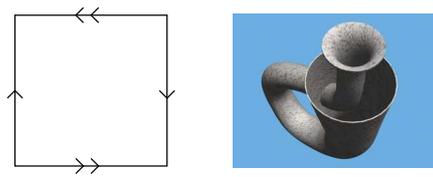


Abbildung 1.15. Die Kleinsche Flasche als Bild des Einheitsquadrats. Die dreidimensionale Veranschaulichung ist ein Standbild aus dem Film [vBL06, Tür 11].

□

1.4.2 Decktransformationen

Definition 1.44. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** (auch: **Deckbewegung**) ist ein Homöomorphismus $\varphi: Y \rightarrow Y$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\varphi} & Y \\
 & \searrow p & \swarrow p \\
 & X &
 \end{array}$$

kommutiert. $\text{Deck}(Y/X) := \{ \varphi: Y \rightarrow Y \mid \varphi \text{ Decktransformation} \}$ bezeichnet die Gruppe der Decktransformationen (bzgl. Hintereinanderausführung).

Beispiel 1.45. Wir betrachten wieder die Überlagerung

$$\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

Die Decktransformationen sind dann offenbar genau die Verschiebungen $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um Vielfache $k \in \mathbb{Z}$ von 2π : $\varphi_k(x) = k \cdot 2\pi + x$. \square

Satz 1.46. Sei $p: Y \rightarrow X = Y/G$ eine Überlagerung, die aus einer lokal einfachen Gruppenoperation entsteht, und sei Y (also auch X) zusammenhängend. Dann ist die natürliche Abbildung

$$G \rightarrow \text{Deck}(Y/X), \quad g \mapsto (\varphi: Y \rightarrow Y, \varphi(y) = g \cdot y)$$

ein Isomorphismus von Gruppen, also:

$$G \cong \text{Deck}(Y / (Y/G)).$$

Beweis. Um die Surjektivität zu zeigen seien $y_0 \in Y$ ein Punkt und

$$\begin{array}{ccc} \varphi: Y & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & Y \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

eine beliebige Decktransformation. Wir setzen: $\varphi(y_0) =: y_1 \in Y$, $p(y_0) = p(y_1) =: x_0 \in X$. Dann können wir φ als Liftung von p auffassen mit $\varphi(y_0) = y_1 \in p^{-1}(x_0)$. Da $p^{-1}(x_0) = G \cdot y_0$, $\exists g \in G$ mit $y_1 = g \cdot y_0$, so dass die natürliche Abbildung $G \rightarrow \text{Deck}(Y/X)$ eine zweite Decktransformation liefert, nämlich $\varphi': Y \rightarrow Y$, $\varphi'(y) = g \cdot y$, mit $\varphi'(y_0) = g \cdot y_0 = y_1$. Wegen $\varphi(y_0) = y_1 = \varphi'(y_0)$ zeigt die Eindeutigkeit der Liftung (Satz 1.29), dass φ mit φ' übereinstimmt. Also ist φ das Bild von g und $G \rightarrow \text{Deck}(Y/X)$ ist surjektiv. Die Injektivität ist klar, da die Operation frei ist. \square

Definition 1.47. Eine Gruppe G operiert **transitiv** auf einer Menge M , wenn für alle $m_1, m_2 \in M$ ein $g \in G$ existiert, das m_1 auf m_2 abbildet: $g \cdot m_1 = m_2$. Mit anderen Worten: für jedes $m \in M$ gilt $G \cdot m = M$.

Nach Definition vertauscht eine Decktransformation $\varphi: Y \rightarrow Y$ höchstens Elemente innerhalb einer Faser $p^{-1}(x)$. Operiert die Gruppe G der Decktransformationen aber transitiv auf einer Faser $p^{-1}(x)$ einer Überlagerung $p: Y \rightarrow X$, so gilt für jedes $y \in p^{-1}(x)$ in dieser Faser: $G \cdot y = p^{-1}(x)$.

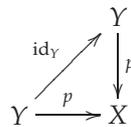
Satz 1.48. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und Y zusammenhängend. $\text{Deck}(Y/X)$ operiert lokal einfach auf Y . Falls $\text{Deck}(Y/X)$ transitiv auf einer Faser $p^{-1}(x)$ operiert, dann gilt:

$$X \approx Y / \text{Deck}(Y/X).$$

Beweis. Um zu zeigen, dass die Operation lokal einfach ist, seien $y \in Y$ und $N \subset X$ eine Überlagerungsumgebung von $x = p(y)$. Sei $V \subset p^{-1}(N) \subset Y$ die Komponente mit $y \in V$. Sind $\varphi, \varphi' \in \text{Deck}(Y/X)$ Decktransformationen mit

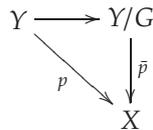
$\varphi(V) \cap \varphi'(V) \neq \emptyset$, so hat $\varphi^{-1} \circ \varphi' : V \xrightarrow{\approx} V$ einen Fixpunkt. — Es gilt nämlich: —
 $\varphi'(v') = \varphi(v)$ für gewisse $v, v' \in V$. Da aber, weil φ und φ' Decktransformationen sind, die Gleichungen $p(\varphi(v)) = p(v)$ und $p(\varphi'(v')) = p(v')$ erfüllt sind, — Als Übung!
 folgt: $p(\varphi(v)) = p(\varphi'(v'))$ und somit $p(v) = p(v')$. Nun ist $p|_V$ aber injektiv, also:
 $v = v'$. Schließlich folgt somit: $\varphi^{-1}(\varphi'(v)) = v$. —

Die Existenz des Fixpunktes zeigt $\varphi^{-1} \circ \varphi' = \text{id}_Y$ wegen der Eindeutigkeit der Liftungen (Satz 1.29), d.h. $\varphi' = \varphi$:



Die Operation ist also nach Definition lokal einfach.

Sei nun $G := \text{Deck}(Y/X)$. Da G nur Elemente innerhalb der Fasern vertauscht, faktorisiert die Überlagerung p über:



\bar{p} ist ebenfalls eine Überlagerung. Operiert G nun auf einer Faser $p^{-1}(x)$ transitiv, so besteht das Urbild $\bar{p}^{-1}(x)$ nur aus einem Punkt (da ja alle Urbilder in einer einzigen G -Bahn liegen). Da X zusammenhängend ist — als Bild des zusammenhängenden Raumes Y unter einer stetigen Abbildung (Satz 0.18) — ist \bar{p} also eine einblättrige Überlagerung, d.h. ein Homöomorphismus. \square

1.4.3 Lokaler Wegzusammenhang

Definition 1.49. Ein topologischer Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn in jeder offenen Umgebung U eines Punktes x eine wegzusammenhängende offene Umgebung V liegt, $x \in V \subset U$.

Bemerkung 1.50. Ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum ist wegzusammenhängend genau dann, wenn er zusammenhängend ist.

Beweis. — Die eine Richtung ist klar. Sei also Z ein lokal wegzusammenhängender und zusammenhängender Raum. Dann ist die Menge der Punkte $w \in Z$, die sich mit einem festen $z \in Z$ durch einen Weg verbinden lassen, zugleich offen und abgeschlossen. — Als Übung! \square —

Ein wegzusammenhängender Raum ist nicht notwendig lokal wegzusammenhängend:

Beispiel 1.51. Sei (siehe Abb. 1.16)

$$X = \{(0, 1) + t(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq 1, x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dieser Unterraum von \mathbb{R}^2 ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend: Mit der Notation

$$B_r^n(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$$

enthält beispielsweise nämlich die Umgebung $B_{\frac{1}{2}}^2((0, 0) \cap X)$ keine zusammenhängende offene Umgebung von $(0, 0)$ in X . \square

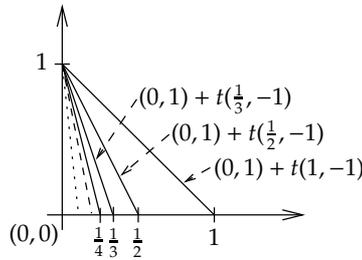


Abbildung 1.16. Ein wegzusammenhängender nicht lokal wegzusammenhängender Raum (siehe Beispiel 1.51).

— 6. Vorlesung:
23. Mai '07 —

Lokaler Wegzusammenhang ist eine lokale Eigenschaft. Solche werden aber von Überlagerungen respektiert; daher gilt:

Bemerkung 1.52. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gilt: X lokal wegzusammenhängend $\iff Y$ lokal wegzusammenhängend.

—
Als Übung!

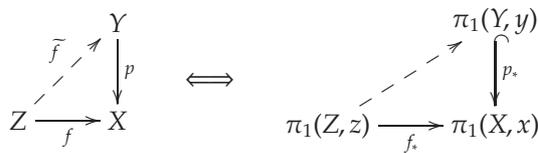
Beweis. — Wir zeigen hier nur die Rückrichtung, die andere ist ähnlich zu beweisen. Sei also $x \in X$ und $V \subset X$ eine offene Umgebung von x . Ferner sei $N \subset V$ eine Überlagerungsumgebung von x . Sei $y \in p^{-1}(x)$ und Z die Komponente von $p^{-1}(N)$, die y enthält. Die Voraussetzung liefert nun: $\exists W \subset Z$ wegzusammenhängend mit $y \in W$. Es gilt: $W \approx p(W) \ni x$, da p eine Überlagerung ist. $p(W)$ ist also eine wegzusammenhängende offene Umgebung von x mit $p(W) \subset V$. — \square

Wir werden diese Bemerkung in der Formulierung folgender Sätze ständig implizit verwenden. Oft fordern wir nämlich den lokalen Wegzusammenhang eines Raumes X , der durch Y überlagert wird, da wir auf die Existenz einer sogenannten universellen Überlagerung für ein gegebenes X hinarbeiten. Wegen der Bemerkung ist dann natürlich auch Y lokal wegzusammenhängend, auch wenn wir es nicht explizit fordern.

Satz 1.53. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $f: Z \rightarrow X$ stetig mit Z zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $x \in X, y \in Y, z \in Z$ mit $f(z) = x = p(y)$. Es existiert eine Liftung $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$ mit $\tilde{f}(z) = y$ genau dann, wenn

$$f_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(Y, y)).$$

Also:

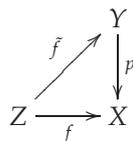


Wenn die Liftung existiert, ist sie eindeutig.

Beweis. Die Notwendigkeit ist klar, da $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Liftung (1.29).

Für die Umkehrung notieren wir zunächst, dass mit der obigen Bemerkung Z wegzusammenhängend ist. Seien nun $w, z \in Z$. Um $\tilde{f}(w)$ zu definieren, wählen wir einen Weg γ von z nach w und betrachten den Weg $f \circ \gamma$ in X . Dann sei $\tilde{f}(w)$ der Endpunkt des eindeutigen Weges, den wir durch Pfadliftung von $f \circ \gamma$ mit Anfangspunkt y erhalten. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{f}(w)$ unabhängig von der Wahl von γ ist. — Sei dazu γ' ein weiterer Weg von z nach w . Dann ist $\gamma' * \gamma^{-1}$ ein geschlossener Weg und $[f \circ (\gamma' * \gamma^{-1})]$ ist nach Voraussetzung im Bild $p_*(\pi_1(Y, y))$. Nach Satz 1.35 über die Eindeutigkeit des Endpunktes ist der Endpunkt unabhängig von der Wahl des Weges. Also haben wir eine wohldefinierte Abbildung

—
Als Übung!



—|

Es bleibt noch zu zeigen, dass \tilde{f} stetig ist. — Dazu betrachten wir eine Überlagerungsumgebung $N \subset X$ von $f(w)$ und eine wegzusammenhängende Umgebung U von w in $f^{-1}(N) \subset Z$ (diese gibt es, da Z lokal wegzusammenhängend ist!). Wir können jeden Punkt $u \in U$ vermöge σ in U mit w und vermöge γ schließlich mit z verbinden: $\gamma * \sigma$. Dies geliftet bleibt in der Komponente $V \subset p^{-1}(N) \subset Y$ mit $\tilde{f}(w) \in V$, also $w \in U \subset \tilde{f}^{-1}(V)$. \tilde{f} ist also stetig in w , da die Überlagerungsumgebung N und damit auch die Umgebung V von $\tilde{f}(w)$ beliebig gewählt war. — □

—
—
Als Übung!

Korollar 1.54. Seien $p: Y \rightarrow X, p': Y' \rightarrow X$ Überlagerungen mit Y, Y' zusammenhängend und X lokal wegzusammenhängend. Seien $y \in Y, y' \in Y'$ Punkte

mit $p(y) = p'(y')$. Genau dann gibt es einen Überlagerungsisomorphismus φ mit $\varphi(y) = y'$, wenn:

$$p_*(\pi_1(Y, y)) = p'_*(\pi_1(Y', y')).$$

Beweis. Wir wenden Satz 1.53 zweimal an, p und p' vertauschen dabei die Rollen. \square

Insbesondere sind dann Y und Y' homöomorph! Wir haben also eben ein algebraisches Kriterium bewiesen, mit dem wir nicht nur die Nicht-Homöomorphie, sondern sogar die Homöomorphie zweier topologischer Räume nachweisen können.

Definition 1.55. Eine Untergruppe U einer Gruppe G heißt **Normalteiler** oder **normale Untergruppe**, falls gilt:

$$\forall u \in U, \forall g \in G : g^{-1}ug \in U.$$

Äquivalent dazu sind: $\forall g \in G : g^{-1}Ug \subset U$ und auch $\forall g \in G : g^{-1}Ug = U$. Die Menge G/U ist dann eine Gruppe.

Satz 1.56. Seien $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und X lokal wegzusammenhängend, $y \in Y$ und $x = p(y)$. Ist $p_*(\pi_1(Y, y)) \subset \pi_1(X, x)$ ein Normalteiler, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y)) \cong \text{Deck}(Y/X).$$

Ferner gilt: $X \approx Y/G$ mit $G = \text{Deck}(Y/X)$.

Beweis. Wir wollen eine Operation

$$\pi_1(X, x) \times Y \rightarrow Y, ([\alpha], z) \mapsto [\alpha].z \in Y,$$

erklären. Sei dazu $z \in Y$. Wir wählen einen Weg γ von y nach z . Ist $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, also α ein geschlossener Weg, so betrachten wir den Weg $\alpha * (p \circ \gamma)$ in X . Pfadliftung liefert einen Weg ρ

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \rho & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\alpha * (p \circ \gamma)} & X \end{array}$$

mit Anfangspunkt $\rho(0) = y$ und Endpunkt $\rho(1) = w \in Y$. Wir haben also einen Punkt $w = w(\alpha, \gamma) \in Y$ definiert. Homotopieliftung zeigt, dass w nur von der Homotopieklasse $[\alpha]$ abhängt, dass also $w = w([\alpha], \gamma)$. Um die gewünschte Operation zu bekommen, bleibt zu zeigen, dass w nicht von der Wahl des Weges γ von y nach z abhängt.

Ist γ' ein weiterer Weg, dann sind $\alpha * (p \circ \gamma)$ und $\alpha * (p \circ \gamma')$ zwei Wege in X und nach Satz 1.35 sind die Endpunkte der Liftung gleich genau dann, wenn:

$$[\alpha * (p \circ \gamma') * (\alpha * (p \circ \gamma))^{-1}] \in p_*\pi_1(Y, y).$$

Dies zeigen wir folgendermaßen. Es gilt: $[\alpha * (p \circ \gamma') * (\alpha * (p \circ \gamma))^{-1}] = [\alpha * (p \circ \gamma') * (p \circ \gamma)^{-1} * \alpha^{-1}] = [\alpha] * p_*[\gamma' * \gamma^{-1}] * [\alpha^{-1}]$. Da aber $[\gamma' * \gamma^{-1}] \in \pi_1(Y, y)$, ist genau dann das konjugierte Element $[\alpha] * p_*[\gamma' * \gamma^{-1}] * [\alpha^{-1}] \in p_*(\pi_1(Y, y)) \forall [\alpha]$ und $\forall \gamma, \gamma'$, wenn $p_*(\pi_1(Y, y))$ ein Normalteiler ist.

Insgesamt haben wir somit bewiesen: $w(\alpha, \gamma)$ hängt nur von $[\alpha]$ und z ab. Dies gibt uns eine Operation

$$\pi_1(X, x) \times Y \rightarrow Y, ([\alpha], z) \mapsto [\alpha].z := w(\alpha, \gamma).$$

Ein Element $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ operiert nach Definition von p_* und von w genau dann trivial, wenn $[\alpha] \in p_*(\pi_1(Y, y))$. Also erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus der Quotientengruppe $G := \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y))$ nach $\text{Deck}(Y/X)$:

$$G \rightarrow \text{Deck}(Y/X).$$

Die Abbildung ist surjektiv, da Y wegzusammenhängend ist: Sei nämlich $\varphi \in \text{Deck}(Y/X)$. Das Bild eines Weges von y nach $y' := \varphi(y) \in p^{-1}(x)$ ist dann geschlossen in X und das entsprechende Element erfüllt $[\alpha].y = y' = \varphi(y)$. Wie im Beweis zu Satz 1.46 folgt nun wegen der Eindeutigkeit der Liftung, dass dies φ schon festlegt.¹

Dies zeigt auch, dass $\text{Deck}(Y/X)$ transitiv auf den Fasern $p^{-1}(x)$ operiert. Es gilt also:

$$X \approx Y/\text{Deck}(Y/X)$$

nach Satz 1.48. □

Der obige Beweis hat gezeigt:

Korollar 1.57. Seien $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und X lokal wegzusammenhängend, $y \in Y$ und $x = p(y)$. $\text{Deck}(Y/X)$ operiert transitiv auf den Fasern $p^{-1}(x)$, $x \in X$, genau dann, wenn $p_*(\pi_1(Y, y)) \subset \pi_1(X, x)$ ein Normalteiler ist.

Definition 1.58. Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X) = 1$ gilt.

¹ Alternativ hätten wir auch sehen können, dass G lokal einfach operiert, da G vermöge des injektiven Gruppenhomomorphismus isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Deck}(Y/X)$ ist. Dann Satz 1.46 anwenden.

Korollar 1.59. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung mit Y einfach zusammenhängend und X lokal wegzusammenhängend. Dann gilt:

$$\pi_1(X, x) \cong \text{Deck}(Y/X).$$

Beweis. Klar mit Satz 1.56, da $\pi_1(Y, y) = \{e\}$ ein Normalteiler ist. \square

Mit Hilfe dieses Resultats können wir nun endlich einige Fundamentalgruppen ohne großen Aufwand berechnen:

Beispiel 1.60. 1. Wie wir schon in Abschnitt 1.2 auf längliche Weise gezeigt haben, gilt mit Beispiel 1.45:

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

2. Die Fundamentalgruppe der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = S^2/\{\pm 1\}$ ist:

$$\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, 1) \cong \text{Deck}(S^2/\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2) \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

da S^2 einfach zusammenhängend ist (dies ist zwar intuitiv einleuchtend, der Beweis steht allerdings noch aus) und da mit Satz 1.46 gilt: $\{\pm 1\} \cong \text{Deck}(S^2 / (S^2/\{\pm 1\}))$.

Intuitiv können wir uns die Tatsache, dass es bis auf Homotopie genau einen nicht-konstanten Weg in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gibt, folgendermaßen veranschaulichen: Der Weg α in Abb. 1.17, der ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ist, lässt sich nicht zusammenziehen. Im Gegensatz zum Einheitskreis ist der Weg $\alpha * \alpha$, der zwei Mal herumgeht, hier aber offenbar zusammenziehbar, da $\alpha = \alpha^{-1}$ und somit: $\alpha * \alpha \sim \varepsilon_P$.

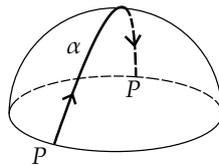


Abbildung 1.17. $\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, 1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ anschaulich: α ist ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, der sich nicht zusammenziehen lässt.

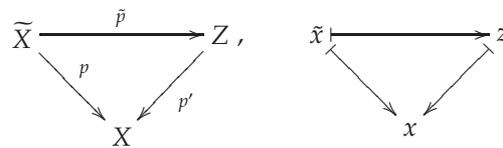
\square

1.4.4 Universelle Überlagerung

Definition 1.61. Eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ mit \tilde{X} einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend heißt **universelle Überlagerung**.

Aus den schon bewiesenen Existenz- und Eindeutigkeitsätzen folgt:

Satz 1.62 (Universelle Eigenschaft der universellen Überlagerung). Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und $p': Z \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung mit Z zusammenhängend. Dann gibt es nach Wahl eines Basispunktes genau eine Überlagerungsabbildung $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow Z$:



Es gilt: $\pi_1(Z, z) \cong \text{Deck}(\tilde{X}/Z)$ und:

$$\text{Deck}(Z/X) \cong \text{Deck}(\tilde{X}/X) / \text{Deck}(\tilde{X}/Z).$$

Beweis. Eine Veranschaulichung dieses Satzes ist auf [vBL06, Tür 17] zu sehen. Die Existenz folgt direkt aus 1.53, da $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$, also $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = 1$. Die Eindeutigkeit folgt aus den Eindeutigkeitsätzen. Aus Korollar 1.59 folgt $\pi_1(Z, z) \cong \text{Deck}(\tilde{X}/Z)$. Der Rest folgt aus Korollar 1.57. \square

Definition 1.63. Eine Überlagerung $Z \rightarrow X$ heißt **normal**, wenn Z zusammenhängend und $\text{Deck}(Z/X)$ transitiv auf den Fasern operiert.

Die universelle Eigenschaft der universellen Überlagerung zeigt:

— 7. Vorlesung:
6. Juni '07 —

Korollar 1.64 (Universelle Überlagerung). X habe eine universelle Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$.

1. Es gilt, dass diese universelle Überlagerung nach Wahl eines Basispunktes $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ eindeutig ist vermöge eines eindeutigen Isomorphismus.
2. Es gibt Bijektionen:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen von} \\ \text{Deck}(\tilde{X}/X) \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Überlagerungen } Z \rightarrow X \\ \text{mit } Z \text{ zusammenhängend} \end{array} \right\} \\ H & \mapsto Z = \tilde{X}/H. \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{Normale Untergruppen von} \\ \text{Deck}(\tilde{X}/X) \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Normale Überlagerungen } Z \rightarrow X \\ \text{mit } Z \text{ zusammenhängend} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

3. Ähnlich wie in der Galois-Theorie haben wir eine Entsprechung, bei der kleinere Untergruppen der Fundamentalgruppe größeren Überlagerungen des Raumes entsprechen:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{X}, \tilde{x} & \rightarrow & \widetilde{X}/H = Y_H, y_H & \rightarrow & \widetilde{X}/K = Y_K, y_K & \rightarrow & X, x \\ \{e\} & \subset & H & \subset & K & \subset & G \end{array}$$

Eine Untergruppe H von G vom Index $[G : H] = d$ entspricht hierbei einer Überlagerung mit Blätterzahl d .

Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Wann besitzt X eine universelle Überlagerung?

Ist $p: \widetilde{X} \rightarrow X$ die bis auf Isomorphie eindeutige universelle Überlagerung und ist $N \subset X$ eine Überlagerungsumgebung von $x \in N \subset X$, dann liftet jeder geschlossene Weg α in N , also $\alpha \in \Omega(N, x)$, zu einem geschlossenen Weg $\tilde{\alpha}$ in \widetilde{X} . Da \widetilde{X} einfach zusammenhängend ist, ist $\tilde{\alpha}$ aber homotop zu $\varepsilon_{\tilde{x}}$ für ein $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Also: $[\alpha] \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \forall \tilde{x} \in p^{-1}(N)$, d.h. $[\alpha]$ liefert die triviale Decktransformation $\in \text{Deck}(\widetilde{X}/X)$. Das zeigt: $\alpha \sim p(\varepsilon_{\tilde{x}}) = \varepsilon_x$, also: $[\alpha] = 0$.² Notwendig für die Existenz einer universellen Überlagerung ist also die folgende Eigenschaft.

Definition 1.65. X sei zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. X heißt **semilokal einfach zusammenhängend**, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder Umgebung $U = U(x)$ des Punktes eine Umgebung $N = N(x) \subset U$ mit $x \in N$ existiert, so dass jeder geschlossene Weg α in N homotop zu einem konstanten Weg in X ist.

Wir werden sehen, dass diese Eigenschaft schon hinreichend für die Existenz einer universellen Überlagerung ist. Zunächst aber zur Abgrenzung dieses Begriffes von seinem nahen Verwandten, dem lokal einfachen Zusammenhang.

Definition 1.66. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt **lokal einfach zusammenhängend**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$ besitzt, die einfach zusammenhängend ist.

Das folgende Beispiel zeigt, dass es semilokal einfach zusammenhängende Räume gibt, die nicht lokal einfach zusammenhängend sind. Dabei wird auch klar werden, dass in der Definition 1.65 die Homotopie von α in der Umgebung N zum konstanten Weg nicht unbedingt in N verlaufen muss, sondern nur in X .

Beispiel 1.67. Wir betrachten (Abb. 1.18, links):

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

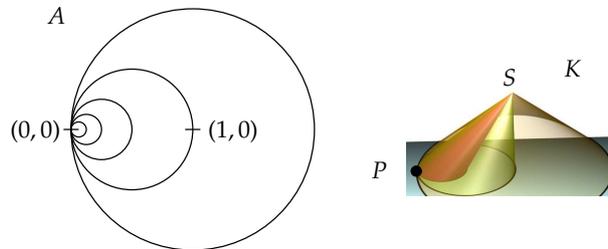


Abbildung 1.18. Ein nicht semilokal einfach zusammenhängender Raum (A) und ein semilokal einfacher zusammenhängender Raum (K), der aber nicht lokal einfach zusammenhängend ist.

A ist offenbar wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Der Punkt $(0, 0) \in A$ hat aber keine offene Umgebung N , in der jeder geschlossene Weg in N homotop zu einem konstanten Weg ist, da jede offene Umgebung von $(0, 0)$ einen — bzw. sogar unendlich viele — Kreise enthält. A ist also nicht semilokal einfach zusammenhängend.

Der Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$ über A (Abb. 1.18, rechts) mit Spitze S ist dagegen semilokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend. \square

Satz 1.68 (Existenz einer universellen Überlagerung). Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. X besitzt eine universelle Überlagerung genau dann, wenn X semilokal einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir bereits eingesehen. Zur Existenz sei X semilokal einfach zusammenhängend. X ist wegzusammenhängend. Sei $x \in X$ fest. Wir definieren:

$$\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ Weg}, \gamma(0) = x\}.$$

$p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist durch $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ definiert. Wir müssen jetzt \tilde{X} eine Topologie geben, so dass $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und \tilde{X} einfach zusammenhängend wird.

Eine Umgebung $N \subset X$ mit $z \in N$ heiße *gut*, wenn N wegzusammenhängend ist und wenn jeder geschlossene Weg in $\Omega(N, z)$ homotop in X zum konstanten Weg ε_z ist. Für jeden Weg γ von x nach z definieren wir eine Umgebung

$$N_{[\gamma]} = \{[\gamma * \alpha] \mid \alpha \text{ Weg in } N \text{ mit } \alpha(0) = z\} \subset \tilde{X}.$$

Dann ist $N_{[\gamma]} \rightarrow N$ bijektiv und außerdem:

²Umgekehrt folgt aus $[\alpha] = 0$ sofort, dass $[\alpha]$ die triviale Decktransformation $\in \text{Deck}(\tilde{X}/X)$ ergibt.

1. Ist β ein geschlossener Weg in N mit $\beta(0) = \beta(1) = z$, so gilt: $N_{[\gamma]} = N_{[\gamma * \beta]}$.
2. Jedes $N' \subset N$ mit $z \in N' \subset X$, offen und wegzusammenhängend, ist ebenfalls gut und $N'_{[\gamma]} \subset N_{[\gamma]}$.
3. γ, γ' seien zwei Weg von x nach z . Dann gilt:

$$N_{[\gamma]} = N_{[\gamma']} \iff \gamma \sim \gamma'$$

und $N_{[\gamma]} \cap N_{[\gamma']} = \emptyset$, falls $[\gamma] \neq [\gamma']$. Denn: $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow N_{[\gamma]} = N_{[\gamma']}$ ist klar nach Def. von $N_{[\gamma]}$. Sei umgekehrt $N_{[\gamma]} \cap N_{[\gamma']} \neq \emptyset$. Dann gibt es α, β mit: $[\gamma * \alpha] = [\gamma' * \beta] \Rightarrow \gamma' \sim \gamma * \alpha * \beta^{-1}$. Nun: $\alpha * \beta^{-1}$ ist ein geschlossener Weg in N und $X \supset N$ ist semilokal einfach zusammenhängend, also $\alpha * \beta^{-1} \sim \varepsilon_z$.
 $\Rightarrow \gamma' \sim \gamma * \varepsilon_z \sim \gamma \Rightarrow [\gamma] = [\gamma']$.

Die Topologie auf \tilde{X} erklären wir nun wie folgt: $U \subset \tilde{X}$ ist offen, falls für jedes $[\gamma] \in U$ eine gute Umgebung U in X existiert mit $N_{[\gamma]} \subset U$. Die Menge $\{U \subset \tilde{X} \mid U \text{ offen}\}$ ist dann in der Tat eine Topologie nach 1. und 2.. Wir müssen nun zunächst einsehen, dass damit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ zu einer Überlagerung wird. — Die Projektion $p|_{N_{[\gamma]}}: N_{[\gamma]} \rightarrow N$ wird zu einem Homöomorphismus nach 1. und 2., wobei die Umkehrabbildung $w \in N$ auf $[\gamma * \alpha]$ abbildet, wobei α ein Pfad in N von $\gamma(1)$ nach w ist. Das ist unabhängig von der Wahl von α , da falls α' ein weiterer solcher Weg ist und α und α' in X homotop sind, so ist $\gamma * \alpha$ homotop zu $\gamma * \alpha'$. Diese Projektion ist stetig, da für eine kleinere Umgebung N' dieses N in $N'_{[\gamma]}$ abgebildet wird. $p^{-1}(N)$ ist eine disjunkte Vereinigung jener offenen Mengen $N_{[\gamma]}$, für die $[\gamma]$ eine Homotopie-Klasse von Pfaden von x zu einem gegebenen Punkt $z \in N$ ist. —

\tilde{X} ist wegzusammenhängend: Ist nämlich $[\gamma] \in \tilde{X}$, also γ ein Weg in X mit $\gamma(0) = x$, dann liefert γ_s mit $\gamma_s(t) := \gamma(st)$ wegen der Eindeutigkeit der Liftung eine Familie $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{\gamma}(s) \mapsto [\gamma_s]$ mit Anfangspunkt $\tilde{x} = [\gamma_0] = [\varepsilon_x]$ und Endpunkt $[\gamma_1] = [\gamma]$. $\tilde{\gamma}$ ist also ein Pfad in \tilde{X} von \tilde{x} nach $[\gamma]$.

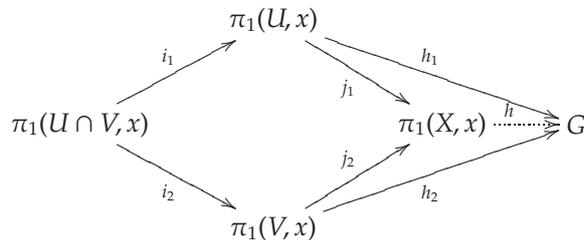
\tilde{X} ist einfach zusammenhängend: Jeder geschlossene Weg in \tilde{X} , der in \tilde{x} beginnt, hat die Form $\tilde{\gamma}$ für einen eindeutigen Weg γ in X . Damit $\tilde{\gamma}$ ein geschlossener Weg ist, muss der die Klasse des Endpunktes repräsentierende Weg $\gamma_1 = \gamma$ homotop zum konstanten Pfad ε_x sein. Wegen der Liftung der Homotopien zeigt dies, dass $\tilde{\gamma}$ schon homotop zum konstanten Pfad $\varepsilon_{\tilde{x}}$ ist. \tilde{X} ist also einfach zusammenhängend. \square

1.5 Der Satz von Seifert – van Kampen

Der Satz von Seifert – van Kampen ist ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Berechnung von Fundamentalgruppen. Mit seiner Hilfe kann man die Fundamentalgruppe eines Raumes berechnen, wenn man die Fundamentalgruppe

gewisser Teilräume kennt. Da der Beweis etwas lang und technisch ist, geben wir zunächst die präzise Formulierung und Anwendungen des Satzes, bevor wir ihn anschließend — allerdings nur unter der Zusatzvoraussetzung, dass eine universelle Überlagerung existiert — beweisen.

Satz 1.69 (Seifert – van Kampen). Sei $X = U \cup V$ die Vereinigung von zwei offenen Teilmengen. U, V und $U \cap V$ seien wegzusammenhängend, $x \in U \cap V$. Dann hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ folgende Eigenschaft:



Für jedes Paar $h_1: \pi_1(U, x) \rightarrow G, h_2: \pi_1(V, x) \rightarrow G$ von Gruppenhomomorphismen, so dass $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$ existiert genau ein $h: \pi_1(X, x) \rightarrow G$, so dass $h_i = h \circ j_i, i = 1, 2$.

Wie schon oben bemerkt, werden wir diesen Satz nur unter der zusätzlichen Voraussetzung der Existenz einer universellen Überlagerung beweisen. Doch zunächst einige Anwendungen dieses Satzes.

1.5.1 Anwendungen

Mit Hilfe des Satzes von Seifert – van Kampen können wir nun endlich einige der Resultate beweisen, die von Beginn an anschaulich einleuchtend erschienen. Wir beginnen mit der Fundamentalgruppe der n -Sphären.

Satz 1.70. Es gilt:

$$\pi_1(S^n, *) = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Beweis. Um den Satz 1.69 von Seifert – van Kampen anwenden zu können, müssen wir geeignete offene Mengen U und V finden mit $S^n = U \cup V$. Wir setzen (s. Abb. 1.19):

$$U = S^n \cap \left\{ x_n > -\frac{1}{2} \right\}, \quad V = S^n \cap \left\{ x_n < \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann sind U und V homöomorph zu einem offenen Ball und $U \cap V \approx S^{n-1} \times [0, 1]$. Die Menge $U \cap V$ ist also wegzusammenhängend, da $n \geq 2$. Sei $x \in U \cap V$.



Abbildung 1.19. Die Aufteilung der Sphäre in zwei Teilmengen X_1 und X_2 mit $S^2 = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. Das ganz rechte Bild zeigt deren Schnitt $X_1 \cap X_2$.

Da $\pi_1(U, x) = \pi_1(V, x) = 0$, erhalten wir mit Seifert – van Kampen: $\pi_1(S^n, x) = 0$. Wenn es nämlich ein $g \in \pi_1(S^n, x)$ geben würde mit $g \neq e$, dann gäbe es zwei verschiedene $h: \pi_1(S^n, x) \rightarrow \pi_1(S^n, x)$, einmal die Identität mit $h(g) = g$ und den trivialen Gruppenhomomorphismus mit $h(g) = e$. In beiden Fällen wäre die Voraussetzung für h trivialerweise erfüllt, da U und V ja einfach zusammenhängend sind und daher nur $h_1([\gamma_1]) = h(j_1(e)) = e = h_2([\gamma_2]) = h(j_2(e))$ zu überprüfen ist. \square

Der gleiche Beweis funktioniert auch allgemeiner:

Korollar 1.71. Ist $X = U \cup V$ mit $U, V, U \cap V$ wegzusammenhängend, so gilt: Aus $\pi_1(U, *) = 0, \pi_1(V, *) = 0$ folgt: $\pi_1(X, *) = 0$.

Die Voraussetzung $U, V, U \cap V$ zusammenhängend ist wichtig. Beispielsweise trifft sie nicht auf den Ring (ein ausgefüllter Torus) zu, wenn er als Vereinigung zweier Mengen geschrieben wird, die jeweils zu einer Kreisscheibe homöomorph sind.

Definition 1.72. Sei \mathcal{A} eine Menge, genannt **Alphabet**. Eine formale Potenz der Form a^k , $a \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{Z}$ heißt **Silbe**, eine endliche Folge von Silben $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$ **Wort**. Die Folge mit Länge 0 heißt **leeres Wort**, geschrieben als e oder 1 . Mit $W(\mathcal{A})$ bezeichnen wir die Menge aller Wörter über \mathcal{A} . Mit der Hintereinanderschreibung als Produkt wird $(W(\mathcal{A}), \cdot)$ zu einer Halbgruppe mit neutralem Element 1 .

Zu einer Gruppe wird dies, indem wir den Quotienten $F(\mathcal{A}) := W(\mathcal{A}) / \sim$ betrachten, wobei hierbei zwei Wörter als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch offensichtliche Verkürzungen ineinander übergehen, genauer: für $U, V \in W(\mathcal{A})$, $a \in \mathcal{A}$, $p, q \in \mathbb{Z}$: $Ua^0V \sim UV$ und $Ua^p a^q V \sim Ua^{p+q}V$. Man kann zeigen, dass $F(\mathcal{A})$ tatsächlich eine Gruppe ist, die sogenannte freie Gruppe über \mathcal{A} .

Beispiel 1.73. Die freie Gruppe $F(\{a\})$ über einem Buchstaben a ist isomorph zu den ganzen Zahlen: $F(\{a\}) \simeq \mathbb{Z}$. \square

Satz 1.74. Die Fundamentalgruppe der ∞ -Figur ist eine freie Gruppe, erzeugt von zwei Elementen.

Beweis. Wir schreiben $\infty = U \cup V$ mit $\pi_1(U, *) = \pi_1(V, *) \simeq \mathbb{Z}$, erzeugt von $a = [\gamma_1]$ bzw. $b = [\gamma_2]$, die jeweils einmal um den jeweiligen Kreis laufen.

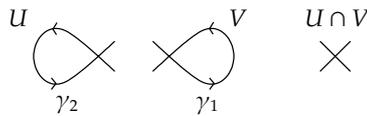


Abbildung 1.20. Die Fundamentalgruppe der ∞ -Figur.

Einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ anzugeben, ist gleichwertig damit, zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ anzugeben: nach dem Satz 1.69 von Seifert – van Kampen gibt es nämlich einen eindeutigen Homomorphismus von $\pi_1(X, x) \rightarrow G$, der $[\gamma_1]$ auf g_1 und $[\gamma_2]$ auf g_2 abbildet, da die beiden Homomorphismen $\pi_1(U, *) \rightarrow G$ und $\pi_1(V, *) \rightarrow G$ durch die Bilder von $[\gamma_1]$ bzw. $[\gamma_2]$ festgelegt sind. Dadurch ist dann auch das Bild von $a^{m_0} b^{m_1} \dots b^{m_r}$ festgelegt. Es ist also

$$\pi_1(\infty, *) = \{a^{m_0} b^{m_1} \dots b^{m_r} \mid \exists r : m_i \in \mathbb{Z}, m_i \neq 0, \text{ außer vielleicht } m_0, m_r\}$$

die freie Gruppe auf zwei Elementen. □

Korollar 1.75. Die Fundamentalgruppe der Vereinigung von n Schleifen ist die freie Gruppe erzeugt von n Elementen g_1, \dots, g_n .

Beispiel 1.76. Sei G ein zusammenhängender Graph.

1. G ist homotop zum Graph G' , wenn dieser durch Zusammenziehen einer Kante zwischen zwei Ecken entsteht.
2. Wir schreiben: $e =$ Anzahl der Ecken, $k =$ Anzahl der Kanten. Dann gilt:

$$\pi_1(G, *) = \text{freie Gruppe mit } k - e + 1 \text{ Erzeugern,}$$

da G' , wie oben gesehen, homotop zu einer Vereinigung von $k - e + 1$ Schleifen ist, wie in Korollar 1.75.

□

Als amüsante Folgerung aus der Überlagerungstheorie erhalten wir das nicht-triviale Resultat, dass eine Untergruppe einer freien Gruppe von endlichem Index wiederum frei ist:

Satz 1.77. Sei G eine freie Gruppe mit n Erzeugern, $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index $[G : H] = d$. Dann ist H isomorph zu einer freien Gruppe mit $d \cdot n - d + 1$ Erzeugern.

—
Als Übung!

Beweis. — Sei X ein Graph mit einem Punkt und n Schleifen. Nach dem Satz 1.64 über die universelle Überlagerung entspricht der Untergruppe $H \subset G \simeq \pi_1(X, x)$ eine Überlagerung $Y = \tilde{X}/H \rightarrow \tilde{X}/G = X$ mit Blätterzahl $[G : H] = d$. Y ist ein zusammenhängender Graph: die d Punkte über jeder Ecke von X können als Ecken von Y genommen werden und, da eine Überlagerung trivial ist über einem kleinen Intervall, die d Komponenten des Urbilds jeder Ecke Ecken sind von Y . Also: Y hat d Ecken und $n \cdot d$ Kanten, d.h. $\pi_1(Y, y) \simeq$ freie Gruppe mit $n \cdot d - d + 1$ Erzeugern. —| \square

— 8. Vorlesung:
13. Juni '07 —

1.5.2 Der Beweis des Satzes

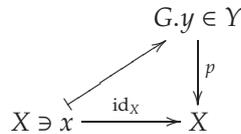
Zum Beweis des Satzes von Seifert – van Kampen werden wir sogenannte G -Überlagerungen verwenden. Wir stellen daher zunächst ein paar grundlegende Informationen dazu bereit, bevor wir den eigentlichen Beweis führen.

Definition 1.78. Y sei ein topologischer Raum, auf dem eine Gruppe G lokal einfach operiert. Dann nennen wir $p: Y \rightarrow X = Y/G$ eine G -Überlagerung. Y braucht nicht zusammenhängend zu sein.

Beispiel/Definition 1.79. Die **triviale G -Überlagerung** ist $p: Y = G \times X \rightarrow X$, wobei G die diskrete Topologie hat. Jede Faser einer G -Überlagerung lässt sich also nach Wahl eines Basispunktes $y \in p^{-1}(x)$ mit G identifizieren. \square

Satz 1.80. Ist X einfach zusammenhängend, dann hat X nur die triviale G -Überlagerung.

Beweis. Sei $p: Y \rightarrow X$ eine G -Überlagerung und seien $x \in X, y \in p^{-1}(x)$. Dann ist $G \cdot y \simeq p^{-1}(x) \simeq G$. Da X einfach zusammenhängend ist, lässt sich



eindeutig liften. Dies definiert einen Homöomorphismus $G \times X \xrightarrow{\cong} Y$. \square

Allgemeiner gilt:

Satz 1.81. Sei X wegzusammenhängend mit universeller Überlagerung \tilde{X} . Dann gibt es eine Bijektion

$$\text{Hom}(\pi_1(X, x), G) \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Überlagerungen } p: Y \rightarrow X \\ \text{mit Basispunkt } y \in p^{-1}(x) \end{array} \right\} / \text{Isomorphie} .$$

Beweis (nur Beweisidee; für eine ausführlichere Form siehe [Ful95], S. 193–196). Wie wir bereits wissen, gilt: $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \simeq \pi_1(X, x)$. Wir wählen einen Basispunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ über x , so dass obiger Isomorphismus eindeutig definiert ist (vermöge Wegliftung). Wir betrachten zu einem $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(X, x), G)$ auf $\tilde{X} \times G$ folgende Operation von $\pi_1(X, x)$:

$$\pi_1(X, x) \times (\tilde{X} \times G) \rightarrow \tilde{X} \times G, [\sigma].(z \times g) = ([\sigma].z) \times g \cdot \rho([\sigma]^{-1}) = ([\sigma].z) \times g \cdot \rho([\sigma]^{-1}).$$

Hierbei ist $[\sigma].z$ die weiter oben beschriebene Wirkung von $\pi_1(X, x)$ auf \tilde{X} (die $([\sigma], z)$ den Endpunkt des nach Wahl des Basispunktes eindeutig gelifteten Weges zuordnet) und $g \cdot \rho([\sigma]^{-1})$ das Produkt in der Gruppe G . Dies definiert tatsächlich eine Linksoperation:

$$[\sigma][\tau](z \times g) = [\sigma \cdot \tau] \cdot (z \times g).$$

Wir setzen

$$Y := (\tilde{X} \times G) / \pi_1(X, x).$$

G operiert auf der zweiten Komponente von links:

$$h.(z \times g) \mapsto z \times (h \cdot g).$$

Insgesamt haben wir also eine Operation von $\pi_1(X, x) \times G$ auf $\tilde{X} \times G$. Deren Quotient ist:

$$(\tilde{X} \times G) / (\pi_1(X, x) \times G) \approx \tilde{X} / \pi_1(X, x) \approx X.$$

Also ist $Y \rightarrow X \approx Y/G$ eine G -Überlagerung.

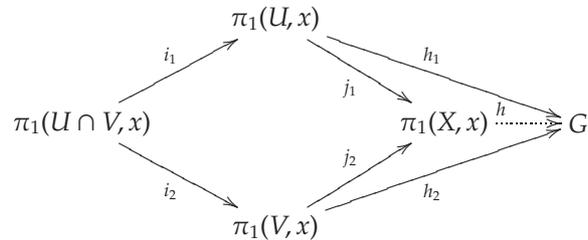
Sei umgekehrt $p: Y \rightarrow X = Y/G, y \mapsto x$ eine G -Überlagerung. Pfadliftung liefert $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(X, x), G)$, der für jedes $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$ definiert ist durch: $[\sigma].y = \rho([\sigma]).y \in G.y$. Wir müssen nun noch zeigen, dass die gegebene G -Überlagerung isomorph ist zu der Überlagerung, die wir von ρ aus bekommen: — siehe dazu beispielsweise die oben angegebene Literatur. — \square

—
Als Übung!
—

Wir werden den Satz von Seifert – van Kampen nur unter der zusätzlichen Annahme beweisen, dass $U, V, U \cap V$ eine universelle Überlagerung besitzen, also zusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend sind. Dazu werden wir die obige bijektive Beziehung zwischen G -Überlagerungen von X und Homomorphismen von $\pi_1(X, x)$ nach G benutzen.

Beweis (von Satz 1.69 (Seifert – van Kampen)). Wir interpretieren $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ als eine geeignete Überlagerung.

Seien h_1, h_2 gegeben. Wir müssen h konstruieren:



Nach Satz 1.81 entsprechen h_1 und h_2 jeweils einer G -Überlagerung $Y_1 \rightarrow U$ bzw. $Y_2 \rightarrow V$ mit Basispunkten y_1 bzw. y_2 . Eingeschränkt auf $U \cap V$ erhalten wir zwei G -Überlagerungen von $U \cap V$, die wegen der Kommutativität des Diagramms isomorph sind. Wir können die G -Überlagerungen vermöge des Isomorphismus kanonisch verkleben: Y kann man dabei als Quotientenraum der disjunkten Vereinigung von Y_1 und Y_2 konstruieren, vermöge der Äquivalenzrelation, die über den Isomorphismus entsprechende Punkte in $h_1^{-1}(U \cap V)$ und $h_2^{-1}(U \cap V)$ identifiziert (siehe auch [Ful95, S. 196–197]). Dies gibt eine G -Überlagerung $Y \rightarrow X$, die auf die beiden obigen G -Überlagerungen einschränkt.

Wieder vermöge des Satzes 1.81 entspricht dieser G -Überlagerung ein Homomorphismus h von $\pi_1(X, x) \rightarrow G$. Die Tatsache, dass die eingeschränkten Überlagerungen auf dem Schnitt übereinstimmen, sagt gerade: $h \circ j_1 = h_1$, $h \circ j_2 = h_2$. \square

Homologie

Bevor wir die Homologie einführen können, benötigen wir einige algebraische Grundlagen. Diese werden in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels bereitgestellt.

Anschließend führen wir zunächst eine recht anschauliche Variante der Homologie, die simpliziale Homologie, ein, bevor wir schließlich die wesentlich ausgereifere Theorie der singulären Homologie vorstellen. Es wird sich schließlich herausstellen, dass beide Zugänge im Wesentlichen die gleichen Ergebnisse liefern.

Mit Hilfe der entwickelten Theorie werden wir dann endlich in der Lage sein, so naheliegende Sätze wie beispielsweise den über die Nichthomöomorphie offener Teilmengen in \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m , $n \neq m$ beweisen zu können.

2.1 Kategorien und Funktoren

In den vergangenen Kapiteln haben wir jedem wegzusammenhängenden topologischen Raum X eine Gruppe $\pi_1(X, x)$ zugeordnet und jeder stetigen Abbildung einen Gruppenhomomorphismus. Dies ist ein Beispiel für einen Funktor. Die obige Zuordnung war natürlich in dem Sinn, dass der Identität bei den topologischen Räumen der identische Homomorphismus der Gruppen zugeordnet wurde; der Komposition stetiger Abbildungen entsprach die Komposition der zugehörigen Homomorphismen.

Diese und ähnliche Zusammenhänge kommen in der Mathematik allgemein und auch hier in der algebraischen Topologie sehr häufig vor, so dass dafür das sehr allgemeine Konzept von Kategorien und Funktoren eingeführt wurde. In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die wichtigsten Begriffe, insbesondere jene, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen werden. Eine wesentlich ausführlichere Darstellung des Themas geben Bücher über homologische Algebra, beispielsweise [PH97].

Definition 2.1. Eine *Kategorie* C besteht aus

1. einer Klasse $\text{Ob}(C)$ von **Objekten**,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \text{Ob}(C)$ einer Menge von **Morphismen** $\text{Hom}(X, Y)$ (Schreibweise: $f: X \rightarrow Y$ für $f \in \text{Hom}(X, Y)$),
3. zu drei Objekten $X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$ einer Abbildung (der **Komposition**):

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f$$

mit folgenden Eigenschaften:

Assoziativität: Es seien die Objekte $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(C)$ und die Morphismen $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, Z)$, $h \in \text{Hom}(Z, W)$ gegeben. Dann gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Identität: Für jedes $X \in \text{Ob}(C)$ existiert ein Morphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$, so dass:

$$\forall f \in \text{Hom}(X, Y) : f \circ \text{id}_X = f, \quad \forall g \in \text{Hom}(Z, X) : \text{id}_X \circ g = g.$$

Definition 2.2. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt **Isomorphismus** bzw. **Äquivalenz**, falls es ein $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Existiert ein solcher Isomorphismus, so heißen X und Y **isomorph**.

Beispiele für Kategorien sind in der Mathematik allgegenwärtig:

- Beispiel/Definition 2.3.**
1. Die Kategorie \mathcal{S} (oder *Sets*) der Mengen und Abbildungen. Die Objekte sind die Mengen und für je zwei Mengen X und Y ist $\text{Hom}(X, Y)$ die Menge der Abbildungen von X nach Y .
 2. Die Kategorie \mathcal{TOP} (oder *Top*) der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.
 3. Die Kategorie \mathcal{TOP}_* der topologischen Räume mit Basispunkt und stetigen Abbildungen, die Basispunkte auf Basispunkte abbilden.
 4. Die Kategorie \mathcal{G} (oder *Groups*) der Gruppen und Gruppenhomomorphismen.
 5. Die Kategorie \mathcal{AB} (oder *Ab*) der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen.

□

Definition 2.4. Eine **Unterkategorie** $C' \subset C$ ist eine Kategorie C' , so dass jedes Objekt von C' ein Objekt von C ist und für $X, Y \in C'$ $\text{Hom}_{C'}(X, Y) \subset \text{Hom}_C(X, Y)$ und die Kompositionen in C' die Komposition in C ist.

Beispiel 2.5. $\text{Groups} \subset \text{Sets}_*, e \mapsto *$. □

Definition 2.6. Ein *kovarianter Funktor* (bzw. *kontravarianter Funktor*) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien ist eine Vorschrift, die jedem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ und jedem $f \in \text{Hom}(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$ (bzw. $F(f) \in \text{Hom}(F(Y), F(X))$) zuordnet, mit:

1. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$,
2. $F(g \circ f) = F(g) \cdot F(f)$ (bzw. $F(g \circ f) = F(f) \cdot F(g)$) für alle $f \in \text{Hom}(X, Y)$ und $g \in \text{Hom}(Y, Z)$.

Beispiel 2.7. 1. Der kovariante Funktor v von der Kategorie Top in die Kategorie Sets . v ordnet jedem topologischen Raum X die zugrundeliegende Menge X zu und jeder stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen die zugehörige Abbildung der zugrundeliegenden Mengen. Dieser Funktor heißt **Vergissfunktor**. Ein entsprechender Funktor kann für viele Kategorien definiert werden.

2. Wie eingangs schon erwähnt, ist π_1 ein kovarianter Funktor von Top_* in Groups . π_1 ordnet jedem punktierten Raum (X, x_0) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ und jeder stetigen Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die Abbildung $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ zu.
3. Der kontravariante Funktor $*$ von der Kategorie der reellen Vektorräume und linearen Abbildungen in die gleiche Kategorie ordnet jedem reellen Vektorraum V den dualen Vektorraum V^* und jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ die duale Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ zu.
4. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. $h_X: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$, $Y \mapsto \text{Hom}(Y, X)$ ist ein kontravarianter Funktor. Für $f \in \text{Hom}(Y, Z)$ ist $h_X(f): h_X(Z) = \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$, $g \mapsto g \circ f$.

□

2.2 Erinnerung: Abelsche Gruppen

Zwar wollen wir, wie eingangs erwähnt, grundlegende Kenntnisse über Gruppen voraussetzen. Trotzdem geben wir hier einen kleinen Überblick über die wichtigsten Begriffe und Fakten, die wir im Folgenden verwenden werden. Aus Zeitgründen werden wir hier allerdings nicht alles beweisen können und verweisen in diesen Fällen auf Literatur: [May89, III.§1], [Rot].

2.2.1 Freie abelsche Gruppen

Definition 2.8. Sei M eine Menge und $(G_m)_{m \in M}$ eine Familie von abelschen Gruppen mit $G_m = \mathbb{Z}$ für alle $m \in M$. Die direkte Summe $\bigoplus_{m \in M} G_m$ heißt die von M erzeugte **freie abelsche Gruppe** und wird mit $\mathbb{Z} \langle M \rangle$ bezeichnet.

Bemerkung 2.9. 1. Freie abelsche Gruppen sind im Allgemeinen keine freien Gruppen, obwohl die freie Gruppe \mathbb{Z} mit einem Erzeuger frei abelsch ist.

2. $\mathbb{Z} \langle \emptyset \rangle$ ist die Gruppe, die aus genau einem Element besteht: $\mathbb{Z} \langle \emptyset \rangle = \{0\} = 0$.

3. Die $\mathbb{Z} \langle M \rangle$ zugrunde liegende Menge ist die Menge aller Abbildungen $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow M$ mit $\varphi(m) \neq 0$ für höchstens endlich viele $m \in M$. Für $m \in M$ und $k \in \mathbb{Z}$ bezeichnet $k \cdot m$ oder km diejenige Abbildung $\varphi: M \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\varphi(m) = k$ und $\varphi(n) = 0 \forall n \in M \setminus \{m\}$. Jedes Element $\varphi \in \mathbb{Z} \langle M \rangle$ lässt sich auf genau eine Weise schreiben als

$$\varphi = \sum_{m \in M} k_m \cdot m$$

mit $k_m \neq 0$ für höchstens endlich viele $m \in M$. Dies ist nicht schwer nachzurechnen ([May89, Bem. III.1.5, S. 105]).

Satz 2.10 (Universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppen). Es seien M eine Menge und $g: M \rightarrow A$ eine Abbildung von M in eine abelsche Gruppe A . Dann gibt es genau einen Homomorphismus $g_*: \mathbb{Z} \langle M \rangle \rightarrow A$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & A \\ f_M \downarrow & \nearrow g_* & \\ \mathbb{Z} \langle M \rangle & & \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. [May89, Satz III.1.6, S. 105] □

Definition 2.11. Sei A eine abelsche Gruppe und $B \subset A$ eine Teilmenge. B heißt **linear unabhängig**, wenn für alle Familien $(n_b)_{b \in B}$ ganzer Zahlen mit $n_b \neq 0$ für höchstens endlich viele $b \in B$ gilt:

$$\sum_{b \in B} n_b b = 0 \Rightarrow n_b = 0 \forall b \in B.$$

B heißt eine **Basis** von A , wenn es zu jedem $a \in A$ genau eine Familie $(n_b)_{b \in B}$ ganzer Zahlen mit $n_b \neq 0$ für höchstens endlich viele $b \in B$ gibt mit $a = \sum_{b \in B} n_b b$.

Eine abelsche Gruppe A heißt **freie abelsche Gruppe**, wenn sie eine Basis besitzt.

Bemerkung 2.12. 1. Ist M eine Menge, so ist $\mathbb{Z} \langle M \rangle$ eine freie abelsche Gruppe, und die Menge M ist eine Basis von $\mathbb{Z} \langle M \rangle$.

2. Ist A eine freie abelsche Gruppe mit Basis B , so ist A isomorph zu $\mathbb{Z} \langle B \rangle$, d.h.: $A \cong \mathbb{Z} \langle B \rangle$.

3. Eine freie abelsche Gruppe lässt sich definieren als eine Gruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z} \langle M \rangle$ ist für eine Menge M .

Satz/Definition 2.13. *A sei eine freie abelsche Gruppe. Wenn A eine endliche Basis besitzt, so ist jede Basis von A endlich, und alle Basen besitzen die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Anzahl heißt der **Rang** von A . Wenn A keine endliche Basis besitzt, so wird der Rang von A als unendlich definiert.*

Beweis. [May89, Satz 1.10, S. 107] □

2.2.2 Exakte Sequenzen abelscher Gruppen

Für eine Gruppe G verwenden wir die Begriffe **Kern**, **Bild** und **Kokern** wie üblich: $\text{Kern}(\alpha) := \{g \in G \mid \alpha(g) = 0\}$, $\text{Bild}(\alpha) = \{h \in H \mid \exists g \in G, \alpha(g) = h\}$, $\text{Kokern}(\alpha) = H / \text{Bild}(\alpha)$.

Definition 2.14. 1. Ein Paar von Homomorphismen abelscher Gruppen

$$G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G''$$

heißt *exakt*, wenn $\text{Bild}(\alpha) = \text{Kern}(\beta)$ ist.

2. Eine Folge von Homomorphismen, etwa

$$\rightarrow G_{-2} \xrightarrow{\alpha_{-2}} G_{-1} \xrightarrow{\alpha_{-1}} G_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3$$

heißt *exakt an der Stelle* G_v , wenn das Paar

$$G_{v-1} \xrightarrow{\alpha_{v-1}} G_v \xrightarrow{\alpha_v} G_{v+1}$$

exakt ist. Die Folge heißt eine **exakte Sequenz**, wenn jedes Paar aufeinanderfolgender Homomorphismen exakt ist.

3. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \rightarrow 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz*.

Die Homologie, die wir später definieren, wird die Abweichung von der Exaktheit einer solchen Sequenz messen.

Satz/Definition 2.15. *Für eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \rightarrow 0$$

sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Es gibt einen Homomorphismus $\varphi: G'' \rightarrow G$, so dass β ein Rechtsinverses besitzt, d.h.: $\beta \circ \varphi = \text{id}_{G''}$.

2. Es gibt eine Homomorphismus $\psi: G \rightarrow G'$, so dass α ein Linksinverses besitzt, d.h.: $\psi \circ \alpha = \text{id}_G$.

In diesem Fall sagt man, dass die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Dann ist G isomorph zu $G' \oplus G''$.

Beweis. Siehe [May89, S. 109]. □

Satz 2.16. Wenn in der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \rightarrow 0$ die Gruppe G'' eine freie abelsche Gruppe ist, dann spaltet die Sequenz.

Beweis. Wir wenden den Satz 2.10 über die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppen an: — Sei B eine Basis von G'' . Für jedes $b \in B$ wird ein Element $g_b \in G$ gewählt mit $\beta(g_b) = b$. Nach der universellen Eigenschaft gibt es genau einen Homomorphismus $\gamma: G'' \rightarrow G$ mit $\gamma(b) = g_b$. Für diesen ist ebenfalls nach dem Satz $\beta \circ \gamma = \text{id}_{G''}$. — □

—
Als Übung!

Satz 2.17 (Fünferlemma). Das Diagramm von Homomorphismen abelscher Gruppen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \xrightarrow{\gamma} & D & \xrightarrow{\delta} & E \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\
 A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \xrightarrow{\gamma'} & D' & \xrightarrow{\delta'} & E'
 \end{array}$$

sei kommutativ und habe exakte Zeilen. Wenn g, k Isomorphismen sind, f surjektiv und l injektiv ist, so ist auch h ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch sogenannte **Diagrammjagd**. — h ist injektiv: Wir starten mit einem $c \in \text{Kern}(h) \subset C$. Da $0 = \gamma' \circ h(c) = k \circ \gamma(c)$ und k injektiv ist, ist $\gamma(c) = 0$ und $\exists b \in B$ mit $\beta(b) = c$. Weil g injektiv ist und $0 = h \circ \beta(b) = \beta' \circ g(b)$, gibt es ein $u \in A'$ mit $\alpha'(u) = g(b)$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $v \in A$ mit $f(v) = u$. Wegen $g \circ \alpha(v) = \alpha'(u) = g(b)$ und der Injektivität von g ist $\alpha(v) = b$ und $\beta(b) = \beta \circ \alpha(v) = 0$. Daher ist $c = 0$.

h ist surjektiv: analog. — □

—
Als Übung!

2.2.3 Endlich erzeugte Abelsche Gruppen

Definition 2.18. A sei eine abelsche Gruppe und $E \subset A$ eine Teilmenge. E heißt **Erzeugendensystem** von A und A heißt **von E erzeugt**, wenn jedes Element aus A eine endliche Summe von Elementen aus E und von Inversen zu Elementen aus E ist. Wenn A ein endliches Erzeugendensystem besitzt, so heißt A **endlich erzeugt**.

- Beispiel 2.19.** 1. Jede endliche abelsche Gruppe ist endlich erzeugt.
2. \mathbb{Z} ist endlich erzeugt. $\{1\}$ und $\{-1\}$ sind Erzeugendensysteme.

3. Jede endliche direkte Summe von endlich erzeugten abelschen Gruppen ist endlich erzeugt.

□

Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung sehen, dass viele Homologiegruppen interessanter topologischer Räume endlich erzeugte abelsche Gruppen sind. Wir geben daher noch einige weitere Begriffe und Sätze, um deren Struktur ein wenig besser kennenzulernen.

Definition 2.20. Sei A eine abelsche Gruppe. $a \in A$ heißt **Torsionselement** von A , wenn es eine positive ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt mit $ma = 0$. Die Menge A_t der Torsionselemente von A ist eine Untergruppe von A und heißt **Torsionsuntergruppe** von A . Eine abelsche Gruppe A heißt **torsionsfrei**, wenn das neutrale Element das einzige Torsionselement von A ist.

Der Beweis der folgenden Aussage ist trivial:

Proposition 2.21. A_t ist eine Untergruppe von A und für jede abelsche Gruppe A ist die Faktorgruppe A/A_t torsionsfrei.

Nicht trivial sind allerdings die folgenden Sätze (für Beweise s. beispielsweise [May89, S. 111ff]).

Satz 2.22. Ist A eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang und C eine Untergruppe von A , so ist C eine freie Gruppe von endlichem Rang und $\text{rang } C \leq \text{rang } A$.

Satz 2.23. Ist A eine torsionsfreie, endlich erzeugte abelsche Gruppe, so ist A frei und A besitzt endlichen Rang.

Definition 2.24. Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so definieren wir den **Rang** von A durch $\text{rang } A := \text{rang}(A/A_t)$:

$$A = \mathbb{Z}^{\text{rang } A} \oplus A_t.$$

Der Rang abelscher Gruppen verhält sich ähnlich wie die Dimension von Vektorräumen:

Satz 2.25. Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $B \subset A$ eine Untergruppe, so sind B und A/B endlich erzeugt und es gilt

$$\text{rang } A = \text{rang } B + \text{rang } A/B.$$

Beweis. [May89, Satz III.1.26, S. 112]

□

Zusammen mit dem Klassifikationssatz der endlichen abelschen Gruppen lässt sich die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen sehr griffig formulieren:

Satz 2.26 (Klassifikationssatz der endlich erzeugten abelschen Gruppen).
Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so gilt:

$$A \cong \mathbb{Z}^{\text{rang } A} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_n^{k_n}}$$

für gewisse Primzahlen p_i und natürliche Zahlen k_i . Hierbei ist

$$A_t \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_n^{k_n}}$$

die Torsionsgruppe von A . Genauer kann man sogar eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $l_i > 1, i = 1, 2, \dots, u$ mit der Eigenschaft $l_i \mid l_{i+1}, i = 1, 2, \dots, u-1$, finden, so dass

$$A_t \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{l_1} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{l_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{l_u}.$$

2.3 Simpliciale Homologie

— 9. Vorlesung:
20. Juni '07 —

Wir stellen in diesem Abschnitt das Konzept der Homologie an den sehr anschaulichen simplizialen Komplexen vor. Erst im nächsten Abschnitt wenden wir uns dann der singulären Homologie zu, die ein zwar abstrakteres und schwieriger verständlicherer Zugang ist, für die aber auch wesentlich komfortablere Hilfsmittel zur Berechnung existieren. Da beide Homologietheorien aber im Wesentlichen auf das selbe herauslaufen, nehmen wir uns die Zeit, zunächst den anschaulicheren Zugang zu besprechen.

2.3.1 Simpliciale Komplexe

Definition 2.27. Die (abgeschlossene!) Menge

$$\Delta_n := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \right\}$$

heißt **Standard n -Simplex** (s. Abb. 2.1).

Für jede Teilmenge $I \subset \{0, \dots, n\}, |I| = m + 1$, haben wir ein m -Simplex

$$\Delta_I := \Delta_n \cap \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_v = 0, \text{ falls } v \notin I\}.$$

Es gilt: $\Delta_m \approx \Delta_I, I = \{i_0 < \dots < i_m\}$ vermöge des Homöomorphismus $(y_0, \dots, y_m) \mapsto \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_{i_v} := y_v\}$.

Der Rand des Standard n -Simplexes besteht aus $(n + 1)$ abgeschlossenen $(n - 1)$ -Simplizes:

$$\partial\Delta_n = \Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_{\hat{n}},$$

wobei $\Delta_{\hat{i}} := \Delta_{\{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}}$ den abgeschlossenen $n - 1$ -Simplex bezeichnet, der durch alle Ecken außer der i -ten von Δ_n aufgespannt wird (Abb. 2.2).

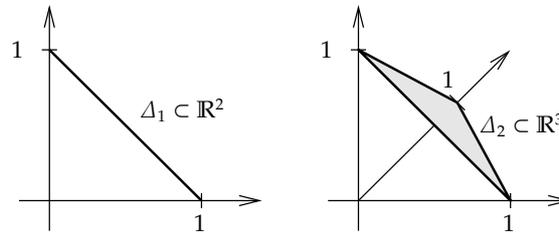


Abbildung 2.1. Der 1- und der 2-dimensionale Standardsimplex..

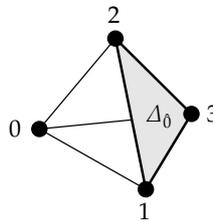


Abbildung 2.2. Der Rand des Standard-Simplexes besteht aus $(n + 1)$ abgeschlossenen $(n - 1)$ -Simplizes, die ihrerseits von allen außer einer Ecke aufgespannt werden. Das Bild zeigt Δ_0 , den von den Ecken $1, 2, \dots, n$ aufgespannten Teilkomplex von Δ_n , $n = 3$.

Definition 2.28. Ein endlicher abstrakter **simplicialer Komplex** mit $N + 1$ Ecken ist eine Teilmenge K der Potenzmenge von $\{0, \dots, N\}$, so dass mit $I \in K$ für jede Teilmenge $J \subset I$ auch $J \in K$ gilt.

Der zugrundeliegende topologische Raum von K ist

$$|K| := \bigcup_{I \in K} \Delta_I \subset \Delta_{N+1}.$$

Die Δ_I mit $I \in K$ nennt man die **Simplizes von K** . $|K|$ ist eine abgeschlossene (und daher kompakte) Teilmenge von Δ_{N+1} .

Die 0- bzw. 1-Simplizes von K heißen **Ecken** bzw. **Kanten** von K .

Beispiel 2.29. Eine Menge, die keinen simplicialen Komplex bildet, ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Die dort gezeigte Menge von Simplizes besteht aus zwei (!) der Ecken, allen drei sichtbaren Kanten und der Dreiecksfläche. Um ein simplicialer Komplex zu sein, müsste auch die dritte Ecke im Komplex enthalten sein. □

Definition 2.30. Eine **Triangulierung** eines kompakten topologischen Raumes X ist ein abstrakter endlicher simplicialer Komplex K zusammen mit einem Homöomorphismus

$$\varphi: |K| \xrightarrow{\cong} X.$$

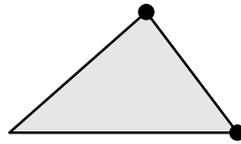


Abbildung 2.3. Ein Beispiel, das keinen simplizialen Komplex bildet.

Beispiel 2.31. 1. $K = \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{0, \dots, n\}$ — das Standard-Simplex ohne Inneres — ist homöomorph zu S^{n-1} vermöge der Projektion vom Zentrum $Z = \frac{1}{n+1}(1, 1, \dots, 1)$.

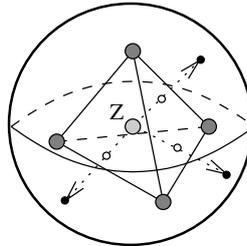


Abbildung 2.4. Der Standard-2-Simplex ist homöomorph zur S^2 vermöge der Projektion vom Zentrum Z .

2. Triangulierungen eines Möbiusbandes (Abb. 2.5, siehe dazu auch Beispiel 1.43.3). Man kann zeigen, dass es keine Triangulierung des Möbiusbandes mit weniger als 5 Ecken gibt. Die rechte Abbildung zeigt eine solche. Mit der dortigen Nummerierung sind die dabei verwendeten Dreiecke die folgenden: 123, 124, 135, 245, 345.

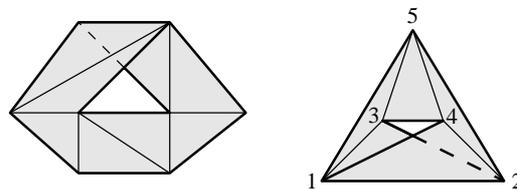


Abbildung 2.5. Zwei Triangulierungen des Möbiusbandes; eine mit 8 Ecken, die andere mit nur 5 Ecken.

3. Eine ausführliche Erläuterung, wie man auf eine Triangulierung des $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit Hilfe der 5-punktigen Triangulierung des Möbiusbandes erhält, steht

in [SZ88, 3.1.22]. Diese Konstruktion benutzt die Tatsache, dass man das Möbiusband in der reellen projektiven Ebene wiederfinden kann (siehe Beispiel 1.43.3).

□

Definition 2.32. Sei K ein simplicialer Komplex. Wir setzen $C_0(K) := C_0(K, \mathbb{Z}) := 0$ und $C_p(K) := C_p(K, \mathbb{Z})$, wobei

$C_p(K, \mathbb{Z}) :=$ freie abelsche Gruppe erzeugt von $\Delta_I, I \in K$ mit $|I| = p + 1$.

$$\partial_p: C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p-1}(K, \mathbb{Z})$$

ist die \mathbb{Z} -lineare Abbildung, die auf den Erzeugern durch

$$\partial \Delta_I := \sum_{v=0}^p (-1)^v \Delta_{I \setminus \{i_v\}}$$

definiert ist, $\partial_0 = 0$ (siehe Abb. 2.6).

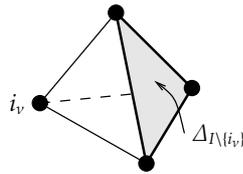


Abbildung 2.6. Zur Definition der Randabbildung ∂_p auf den Erzeugern Δ_I .

2.3.2 Simpliciale Homologie

Die folgende Eigenschaft von ∂_p ist ganz wesentlich für alle anschließenden Konstruktionen:

Lemma 2.33. Es gilt:

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \partial \partial \Delta_{\{0, \dots, n\}} &= \partial \sum_{v=0}^n (-1)^v \Delta_{\{0, \dots, \widehat{i}_v, \dots, n\}} \\ &= \sum_{v=0}^n (-1)^v \left(\sum_{\mu=0}^{v-1} (-1)^\mu \Delta_{\{0, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_v, \dots, n\}} + \sum_{\mu=v}^{n-1} (-1)^\mu \Delta_{\{0, \dots, \widehat{i}_v, \dots, \widehat{i}_{\mu+1}, \dots, n\}} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $\Delta_{\{0, \dots, n\} \setminus \{i, j\}}$ zweimal vorkommt, aber mit verschiedenen Vorzeichen. □

Definition 2.34. Wir setzen:

$$Z_p(K) := \text{Kern } \partial_p, \quad B_p(K) := \text{Bild } \partial_{p+1}.$$

Da $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ ist, gilt $B_p(C_\bullet) \subset Z_p(C_\bullet)$, so dass wir den Quotienten

$$H_p(K) = H_p(K, \mathbb{Z}) := \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$$

bilden können, weil alle involvierten Gruppen abelsch sind. $H_p(K)$ heißt die p -te (reduzierte) **Homologiegruppe** von K mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Die Homologiegruppen $H_p(K)$ messen also, an welchen Stellen die Sequenz

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

nicht exakt ist.

Satz/Definition 2.35. Ist X ein **triangulierbarer topologischer Raum**, d.h. es gibt einen simplizialen Komplex K mit $|K| \approx X$, dann gilt:

$$H_p(K, \mathbb{Z}) \cong H_p(L, \mathbb{Z})$$

für jeden weiteren simplizialen Komplex L mit $|K| \approx X \approx |L|$.

Beweis. Erst später (Satz 2.74), ohne weitere Methoden zu schwierig. \square

Damit können wir von $H_p(|K|, \mathbb{Z})$ sprechen, da diese Gruppe ja nicht von der gewählten Triangulierung abhängt. Wir können also definieren:

Bemerkung/Definition 2.36. $H_p(|K|, \mathbb{Z})$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

$$b_p := \text{rang } H_p(|K|, \mathbb{Z})$$

heißt p -te **Bettizahl** von $|K|$.

$$e = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p$$

heißt die **Eulerzahl** von $|K|$.

Korollar 2.37. Die Eulerzahl von $|K|$,

$$e(|K|) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{rang } H_p(|K|, \mathbb{Z}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{rang } C_p(K, \mathbb{Z}),$$

ist unabhängig von der Triangulierung:

$$e(|L|) = e(|K|), \quad \text{falls } |K| = |L|.$$

Beweis. Die Unabhängigkeit von der Triangulierung folgt aus dem obigen Satz 2.35. Für die Gleichung (*) bemerken wir zunächst, dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Kern } \partial_p \xrightarrow{\text{id}} C_p(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_p} \text{Bild } \partial_p \rightarrow 0$$

gibt, da dann offenbar die Stelle C_p exakt ist. Dies zeigt:

$$\text{rang } B_{p-1}(K) + \text{rang } Z_p(K) = \text{rang } C_p(K, \mathbb{Z}).$$

Außerdem gilt nach Definition der Homologiegruppen:

$$\text{rang } H_p(K) + \text{rang } B_p(K) = \text{rang } Z_p(K).$$

Mit diesen beiden Gleichungen folgt nun:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{rang } C_p(K, \mathbb{Z}) &= \sum_{p=0}^n (-1)^p (\text{rang } B_{p-1}(K) + \text{rang } Z_p(K)) \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p (\text{rang } B_{p-1}(K) + \text{rang } H_p(K) + \text{rang } B_p(K)) \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{rang } H_p(K) = e(|K|). \end{aligned}$$

□

Dieses Korollar liefert eine recht einfache Möglichkeit, die Eulerzahl für einen gegebene triangulierten Raum auszurechnen. Wir betrachten dies am Beispiel der Zwei-Sphäre:

Beispiel 2.38. Wir betrachten zwei Triangulierungen der $S^2 \subset \mathbb{R}^3$: diejenige, die durch einen regelmäßigen Tetraeder gegeben wird und jene, die durch den Würfel gegeben wird, bei der jede Seitenfläche in zwei Dreiecke geteilt wird. Wir berechnen die Eulerzahl über die Ränge der freien abelschen Gruppe C_p , d.h. über die Anzahl c_i der Erzeuger in den einzelnen Dimensionen:

Für den Würfel gilt: $c_0 = 8$, $c_1 = 3 \cdot 4 + 6 = 18$, $c_2 = 6 \cdot 2 = 12$, also

$$e(\text{Würfel}) = c_0 - c_1 + c_2 = 8 - 18 + 12 = 2.$$

Für den Tetraeder ergibt sich:

$$e(\text{Tetraeder}) = c_0 - c_1 + c_2 = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Wie erwartet erhalten wir also für beide Triangulierungen das gleiche Ergebnis. Die Eulerzahl der Sphäre ist $e(S^2) = 2$. □

Die Berechnungen des Beispiels zeigen mit Korollar 2.37:

Satz 2.39 (Eulerschen Polyedersatz). Für jede Triangulierung der 2-Sphäre gilt:

$$e - k + d = 2 (= e(S^2)),$$

wobei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und d die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung ist.

2.3.3 Komplexe

Die vorige Konstruktion folgt einem allgemeinen Konzept, mit Hilfe dessen sich Homologiegruppen allgemein definieren lassen.

Definition 2.40. Ein **Komplex abelscher Gruppen** (bzw. \mathbb{R} -Vektorräumen, \mathbb{R} -Moduln)

$$C_\bullet : \cdots \rightarrow C_p \rightarrow C_{p-1} \rightarrow \cdots$$

ist eine Folge von abelschen Gruppen (bzw. \mathbb{R} -Vektorräumen, \mathbb{R} -Moduln) zusammen mit **Differentialen**

$$\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}, \text{ mit } \partial_{p-1} \circ \partial_p = 0.$$

Ein **Morphismus** $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ zwischen zwei Komplexen ist eine Familie von Morphismen $f_p : C_p \rightarrow D_p$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_p & \longrightarrow & C_{p-1} \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ D_p & \longrightarrow & D_{p-1} \end{array}$$

kommutiert für jedes p .

Dies erklärt die Kategorie **Comp** der Komplexe.

Ist C_\bullet nun ein Komplex, so setzen wir:

$$Z_p(C_\bullet) := \text{Kern } \partial_p, \quad B_p(C_\bullet) := \text{Bild } \partial_{p+1}.$$

Da $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ ist, gilt wie schon im obigen Beispiel der simplizialen Homologie $B_p(C_\bullet) \subset Z_p(C_\bullet)$, so dass wir den Quotienten

$$H_p(C_\bullet) := \frac{Z_p(C_\bullet)}{B_p(C_\bullet)}$$

bilden können, weil alle involvierten Gruppen abelsch sind. $H_p(C_\bullet)$ heißt p -te **Homologiegruppe** von C_\bullet .

Definition 2.41. Eine Sequenz von Homomorphismen von Komplexen heißt **exakt**, wenn für jedes p die zugehörige Sequenz von Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen exakt ist.

Eine exakte Sequenz von Homomorphismen von Komplexen der Form

$$0 \rightarrow K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \rightarrow 0$$

heißt entsprechend **kurze exakte Sequenz** von Komplexen. 0 ist hierbei der Komplex, der aus nur trivialen Gruppen besteht.

Satz/Definition 2.42 (lange Homologiesequenz von Komplexen). Jede kurze exakte Sequenz von Komplexen induziert eine **lange exakte Homologiesequenz**.

Beweis. Diagrammjagd; siehe auch [May89, Satz III.3.8]. □

2.4 Singuläre Homologie

— 10. Vorlesung:
27. Juni '07 —

Wir werden nun die schon angesprochene Theorie der singulären Homologie einführen, mit Hilfe derer wir viele Homologiegruppen ausrechnen werden können. In diesem Kapitel gehen wir zunächst ähnlich vor wie das Buch [Hat02].

Definition 2.43. Sei X ein topologischer Raum. Ein **singuläres n -Simplex** ist eine stetige Abbildung¹

$$\sigma: \Delta_n \rightarrow X,$$

wobei Δ_n wie üblich das Standard n -Simplex bezeichnet. Wir setzen:

$$C_n(X) := \text{freie abelsche Gruppe erzeugt von allen } n\text{-Simplizes } \sigma: \Delta_n \rightarrow X.$$

Den **Rand** eines Simplexes σ definieren wir als

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i^n),$$

wobei ε_i^n die Abbildung

$$\varepsilon_i^n: \Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n, \quad e_0, \dots, e_{n-1} \mapsto e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$$

ist. Wir setzen ∂ zu einer \mathbb{Z} -linearen Abbildung

$$\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

¹Der Bezeichnung *singulär* erinnert daran, dass keine besonderen Anforderungen an diese Abbildung gestellt werden; sie kann auch *Singularitäten* besitzen.

fort. Dann gilt:

$$\partial \circ \partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-2}(X), \quad \partial \circ \partial = 0,$$

was genauso wie bei der simplizialen Homologie gezeigt werden kann. Die Elemente von $C_n(X)$ nennen wir **n -Ketten**, die von

$$Z_n(X) := \text{Ker}(\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))$$

n -Zykel und

$$B_n(X) := \text{Im}(\partial: C_{n+1} \rightarrow C_n(X))$$

n -Ränder. Schließlich heißt

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$$

die n -te **singuläre Homologiegruppe** von X . Der Komplex $(C_\bullet(X), \partial)$ heißt der **singuläre Kettenkomplex**.

Bemerkung/Definition 2.44. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, dann induziert $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ durch \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung eine Abbildung

$$f_*: C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$$

zwischen Komplexen. Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} f_*(\partial\sigma) &= f_*\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i^n)\right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma \circ \varepsilon_i^n) \\ &= \partial(f \circ \sigma) = \partial(f_*\sigma). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f einen Gruppenhomomorphismus

$$H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

induziert, da Ränder wieder auf Ränder abgebildet werden.

Bemerkung 2.45. 1. Wir haben Funktoren:

$$\text{Top} \xrightarrow{C_\bullet} \text{Comp} \xrightarrow{H_\bullet} \text{Ab}.$$

Im Gegensatz zu der Konstruktion mit Triangulieren ist hier alles funktoriell. Der Nachteil ist hier aber, dass alleine mit der Definition nicht klar ist, wie man die Homologiegruppen näher bestimmen kann.

2. Einen n -Zykel stellt man sich oft als (Summe von) triangulierten n -dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten von X ohne Rand vor. Einen n -Rand kann man sich als Rand einer $(n+1)$ -dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeit von X mit Rand vorstellen

3. Methoden zur Bestimmung der $H_n(X)$ werden wir erst nach und nach kennenlernen. Man kann zeigen, dass die nachfolgenden Sätze die Homologiegruppen (in einer großen Klasse von topologischen Räumen) eindeutig bestimmen. Sie bekommen daher auch das Attribut Axiom.

Satz 2.46 (Dimensionsaxiom). Sei $X = \{*\}$ ein einpunktiger topologischer Raum. Dann gilt:

$$H_0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}, H_i(\{*\}) = 0, \text{ für } i > 0.$$

Beweis. Da $X = \{*\}$ nur aus einem Punkt besteht, gibt es nur eine Abbildung

$$\sigma: \Delta_n \rightarrow \{*\}.$$

Also:

$$C_n(\{*\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Das Differential $\partial_n: C_n(\{*\}) \rightarrow C_{n-1}(\{*\})$ ist:

$$\partial_n = \begin{cases} \sigma_{n-1}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

da wir in $\delta_n(\tau) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\tau \circ \varepsilon_i^n)$ eine gerade bzw. ungerade Anzahl von (identischen) Summanden $\sigma_{n-1}: \Delta_{n-1} \rightarrow X$ haben. Vermöge des Isomorphismus $C_n(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$ haben wir also $\partial_n = 1$ für n gerade und $\partial_n = 0$ für n ungerade.

Somit ist $C_\bullet(\{*\})$ der Komplex

$$\cdots \longrightarrow C_4 = \mathbb{Z} \xrightarrow{1} C_3 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{1} C_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} C_0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0.$$

Es folgt: $H_0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$ und $H_i(\{*\}) = 0, \forall i > 0$. □

In der Einleitung (Satz 0.10) haben wir $\pi_0(X)$ als die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten definiert. Es lässt sich nicht schwer zeigen, dass dies gerade der Rang der 0-ten Homologiegruppe ist:

Satz 2.47 (Die 0-te Homologie).

1. Entsprechend der Zerlegung eines topologischen Raumes X in Wegzusammenhangskomponenten X_α gibt es einen Isomorphismus

$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha).$$

2. Falls X nicht leer und wegzusammenhängend ist, so gilt: $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Also: $H_0(X)$ ist eine direkte Summe von \mathbb{Z} s, eine für jede Komponente $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$. Also: $b_0(X) = \pi_0(X)$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

Beweis. 1. Ein singuläres n -Simplex hat immer ein wegzusammenhängendes Bild. Daher spaltet sich $C_n(X)$ als direkte Summe von Untergruppen $C_n(X_\alpha)$. Die Abbildung ∂_n erhält diese Aufspaltung und bildet $C_n(X_\alpha)$ in $C_{n-1}(X_\alpha)$ ab. Die Behauptung folgt.

2. Es gilt $H_0(X) = C_0(X)/\text{Bild } \partial_1$, da $\partial_0 = 0$. Wir definieren $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $\varepsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Offenbar ist ε surjektiv. Man kann zeigen, dass, da X wegzusammenhängend ist, Kern $\varepsilon = \text{Bild } \partial_1$ gilt. — Siehe beispielsweise [Hat02, Prop. 2.7]. —

—
Als Übung!

□

Das erste wichtige Resultat, das wir über singuläre Homologie beweisen, sagt, dass homotopieäquivalente Räume isomorphe Homologiegruppen besitzen. Wie in 1.10 definiert heißen $f, g: X \rightarrow Y$ homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt mit $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$:

Satz 2.48 (Homotopieaxiom). *Sei $f, g: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sind f und g homotop ($f \simeq g$), dann stimmen die induzierten Abbildungen auf der Homologie überein:*

$$H_n(f) = H_n(g): H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \forall n.$$

Beweis. Die Idee ist die Prismenkonstruktion (s. auch [Hat02, S. 111 ff]): Für ein $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ erhalten wir vermöge der Komposition mit f bzw. g eine Abbildung:

$$F \circ (\sigma \times \text{id}): \Delta_n \times [0, 1] \rightarrow Y.$$

Wir zerlegen das Prisma $\Delta_n \times [0, 1]$ in $(n + 1)$ verschiedene $(n + 1)$ -Simplizes mit den Ecken (s. Abb. 2.7):

$$[a_0, b_0, \dots, b_n], \dots, [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_n], \dots, [a_0, \dots, a_n, b_n].$$

Mit $[p_0, \dots, p_k]: \Delta_k \rightarrow Z$, $Z \subset \mathbb{R}^N$, eine konvexe Teilmenge, bezeichnen wir die affine Abbildung mit $e_i \mapsto p_i$.

Wir definieren:

$$\beta(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{(F \circ (\sigma \times \text{id})) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_n]}_{\Delta_{n+1} \rightarrow Y \in C_{n+1}(Y)}.$$

Dies ist eine sinnvolle Definition wegen der Aufteilung des Prismas. Der Rand $\partial\beta(\sigma)$ ist hierbei das Bild des Randes des Prismas.

Durch \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung erhalten wir

$$\beta: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$$

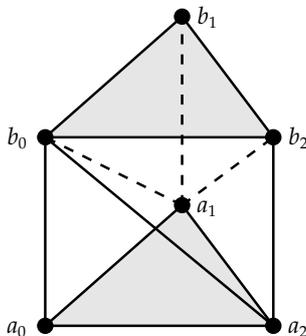


Abbildung 2.7. Die Prismenkonstruktion zum Beweis des Homotopieaxioms.

und damit:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \searrow & \downarrow g_* - f_* & \swarrow & \downarrow g_* - f_* & \searrow \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \swarrow \beta & \downarrow \beta & \swarrow \beta & \downarrow \beta & \swarrow \beta & & \\
 & & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & &
 \end{array}$$

Man kann nachrechnen (wiederum ähnlich dem Beweis für $\partial \circ \partial = 0$ weiter oben), dass gilt:

$$\partial \circ \beta + \beta \circ \partial = g_* - f_* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y),$$

wobei $f_*, g_* : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ wie oben definiert die von $f, g : X \rightarrow Y$ induzierten Abbildungen auf den Komplexen sind.

Wir müssen noch einsehen, dass damit auch schon die Abbildungen auf der Homologie gleich sind: Ist $z \in Z_n(X) = \text{Kern}(\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X))$ ein Zykel, dann gilt wegen der Bemerkung 2.44: $f_*(\partial z) = \partial(f_*z)$ und $g_*(\partial z) = \partial(g_*z)$ und daher mit der Identität von oben:

$$g_*(z) - f_*(z) = \partial(\beta(z)) + \beta(\underbrace{\partial(z)}_{=0}) = \partial(\beta(z)).$$

Die letzte Gleichung gilt, da z ein Zykel ist. Also ist $g_*(z) - f_*(z)$ ein Rand, so dass $g_*(z)$ und $f_*(z)$ die gleiche Homologieklassen definieren und daher sind f_* und g_* auf der Homologie die gleichen Abbildungen. \square

Wir fassen das, was wir am Ende des obigen Beweises gesehen haben, noch einmal mit einem eigenen Begriff zusammen:

Definition 2.49. Seien $f_\bullet, g_\bullet : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \partial)$ zwei Morphismen zwischen Komplexen. Eine **Homotopie** zwischen f_\bullet und g_\bullet ist eine Familie β_\bullet von $\beta_p : C_p \rightarrow D_{p+1}$ mit:

$$\partial_{p+1} \circ \beta_p + \beta_{p-1} \circ \partial_p = g_p - f_p.$$

f und g heißen dann **homotop**.

Korollar 2.50. Homotope Morphismen zwischen Komplexen induzieren die gleiche Abbildung auf den Homologiegruppen.

Sehr leicht lassen sich nun beispielsweise die Homologiegruppen sternförmiger oder zusammenziehbarer Räume berechnen:

Korollar/Definition 2.51. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ **sternförmig** (d.h. es existiert ein Punkt $p \in X$, so dass die Strecke von $q \in X$ nach p in X enthalten ist), dann gilt:

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ der Punkt bzgl. dessen X sternförmig ist. Dann sind id_X und die Konstante Abbildung $X \xrightarrow{p} x_0 \in X$ homotop vermöge

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad F(x, t) := x + t(x_0 - x).$$

Die Behauptung folgt. □

2.5 Das Ausschneidungsaxiom

— 11. Vorlesung:
4. Juli '07 —

Definition 2.52. Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge. (X, A) heißt dann ein **Raumpaar**. Dann ist $C_\bullet(A) \hookrightarrow C_\bullet(X)$ ein Unterkomplex. Wir definieren

$$C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

mit induziertem Differential. Die **Homologie eines Raumpaars** (X, A) (auch **relative Homologie von X modulo A** genannt) ist:

$$H_n(X, A) := H_n(C_\bullet(X, A)).$$

Satz/Definition 2.53 (Lange Homologiesequenz, Exaktheitsaxiom). Zu einem Raumpaar $A \subset X$ existiert eine lange exakte Homologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots.$$

Für eine **stetige Abbildung** $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwischen Raumpaaren, d.h. $f: X \rightarrow Y$ stetig, $f(A) \subset B$, ist die Randabbildung mit $H_\bullet(f)$ verträglich, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. Klar nach Konstruktion der Abbildungen, Diagrammjagd. \square

Bemerkung/Definition 2.54. 1. Ein typisches Element von $H_n(X, A)$ wird repräsentiert durch eine triangulierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit M mit Rand, deren Rand ∂M in A liegt. Die **Randabbildung** bildet $[M] \mapsto [\partial M]$ ab (s. Abb. 2.8).

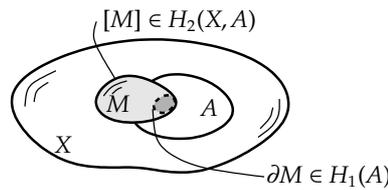


Abbildung 2.8. Die Randabbildung.

2. $H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$, da sich für $A = \emptyset$ in der langen exakten Sequenz ergibt $H_n(A) = H_{n-1}(A) = 0$ und daher $0 \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow 0$ exakt ist.

Satz 2.55 (Ausschneidungsaxiom). Sei (X, A) ein Raumpaar, $U \subset X$ eine Teilmenge, deren Abschluss im Inneren von A liegt: $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Dann gilt:

$$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U)$$

vermöge der Inklusion.

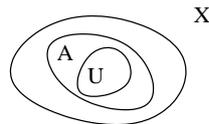


Abbildung 2.9. Die Situation beim Ausschneidungsaxiom.

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir zunächst eine Umformulierung und dann einige Anwendungen.

Satz 2.56 (Ausschneidungsaxiom, zweite Formulierung). Seien $X_1, X_2 \subset X$ und $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. Dann induziert $j: (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$ einen Isomorphismus

$$H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X_2).$$

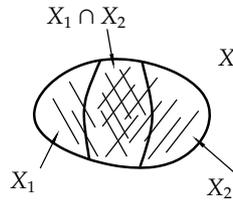


Abbildung 2.10. Die Situation bei der zweiten Formulierung des Ausschneidungsaxioms.

Beweis. Wir setzen: $A = X_2$, $U = X \setminus X_1$. Dann gilt: $\overline{U} = X \setminus \overset{\circ}{X}_1 \subset \overset{\circ}{X}_2 = \overset{\circ}{A}$. Ferner ist: $A \setminus U = X_1 \cap X_2$, $X \setminus U = X_1$. Damit ist die Äquivalenz der beiden Formulierungen des Ausschneidungsaxioms offensichtlich. \square

2.5.1 Anwendungen des Ausschneidungsaxioms

Die zweite Version des Ausschneidungsaxioms ist äquivalent zur ersten. Eine wichtige Anwendung dieser Sätze ist die Existenz der sogenannten Mayer-Vietoris-Sequenz, mit Hilfe derer wir viele Homologiegruppen ausrechnen können, analog zum Satz von Seifert – van Kampen für die Fundamentalgruppen. Dafür benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 2.57. Gegeben sei ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{k_n} & C_n & \xrightarrow{m_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \cong \downarrow h_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{l_n} & C'_n & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & \cdots
 \end{array}$$

mit exakten Zeilen, bei dem h_n ein Isomorphismus ist. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow A_n \xrightarrow{(i_n, f_n)} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{-} B'_n \xrightarrow{D} A_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

wobei D definiert ist durch $m_n \circ h_n^{-1} \circ l_n$ und die Abbildung $-: B_n \oplus A'_n \rightarrow B'_n$ durch $(b, a) \mapsto g_n(b) - j_n(a)$.

Beweis. Diagrammjagd. \square

Damit können wir ein Analogon zum Satz von Seifert – van Kampen für die Homologiegruppen zeigen:

Satz 2.58 (Mayer-Vietoris-Sequenz). Seien $X_1, X_2 \subset X$ mit $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_n(X) \xrightarrow{D} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \cdots.$$

Beweis. Wir möchten das Lemma auf die beiden langen exakten Homologie-sequenzen

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

zu den Paaren

$$\begin{array}{ccccc} (X_1 \cap X_2, \emptyset) & \hookrightarrow & (X_1, \emptyset) & \longrightarrow & (X_1, X_1 \cap X_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\ (X_2, \emptyset) & \hookrightarrow & (X, \emptyset) & \longrightarrow & (X, X_2) \end{array}$$

anwenden:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & H_n(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_n(X_1) & \longrightarrow & H_n(X_1, X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) & \cdots \\ & \downarrow H_n(i) & & \downarrow H_n(j) & & \downarrow h_n & & \downarrow H_{n-1}(i) & \\ \cdots & H_n(X_2) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \cdots \end{array}$$

Die zweite Version des Ausschneidungsaxioms (Satz 2.56) zeigt, dass die h_n Isomorphismen sind. Das Lemma liefert dann die Existenz der exakten Sequenz. \square

Einen ausführlichen Schritt-für-Schritt-Beweis für die Existenz der Mayer-Vietoris-Sequenz liefert Fulton [Ful95, S. 140ff]. Mit dem Satz können wir nun die Homologiegruppen der n -Sphären berechnen:

Satz 2.59 (Homologie der n -Sphäre). Sei S^n , $n > 1$, die n -Sphäre. Dann gilt:

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0 \text{ oder } n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage über $H_0(S^n)$ kennen wir bereits (Satz 2.47).

Wir betrachten nun, wie bei der Berechnung der Fundamentalgruppe der Sphären in Satz 1.70, die Mengen $X_1 = S^n \cap \{x_n \geq -\frac{1}{2}\}$, $X_2 = S^n \cap \{x_n \leq \frac{1}{2}\}$ (s. Abb. 2.11). Dann: $X_1 \cap X_2 \simeq S^{n-1}$ homotop und $X_1 \simeq X_2 \simeq D^n$.

Die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert für $p \geq 2$:

$$H_p(X_1) \oplus H_p(X_2) = 0 \rightarrow H_p(S^n) \rightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 = H_{p-1}(X_1) \oplus H_{p-1}(X_2),$$

also:

$$H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1}).$$

Per Induktion folgt also die Behauptung; wir müssen nur noch den Fall $p = 1$ klären. $H_1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$ folgt mit der exakten Sequenz:

$$\cdots \rightarrow \underbrace{H_1(X_1) \oplus H_1(X_2)}_{\cong 0} \rightarrow H_1(X) \rightarrow \underbrace{H_0(X_1 \cap X_2)}_{\cong \mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)}_{\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \rightarrow 0.$$

\square

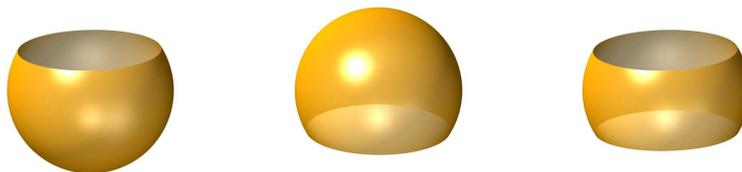


Abbildung 2.11. Die Aufteilung der Sphäre in zwei offene Teilmengen X_1 und X_2 mit $S^2 = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$ zur Berechnung der Homologiegruppen der Sphäre. Das ganz rechte Bild zeigt deren Schnitt $X_1 \cap X_2$.

Einiges aus diesem Beweis kann man auch ein wenig allgemeiner formulieren. Dazu führen wir zunächst einen Begriff ein:

Definition 2.60. Gilt $H_p(X) = 0 \forall p \neq 0$, so heißt X *azyklisch*.

Bemerkung 2.61. 1. Ist $X_1 \cap X_2$ azyklisch, so folgt mit der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 2.58) unmittelbar: $H_p(X) \cong H_p(X_1) \oplus H_p(X_2)$ für $p \neq 0$.

2. Ebenso gilt: Sind X_1 und X_2 azyklisch, so ist $H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(X_1 \cap X_2)$ ein Isomorphismus für $p \geq 2$.

Eine interessante Anwendung der vorigen Sätze ist der folgende Fixpunktsatz, für dessen Formulierung algebraische Topologie gar nicht verwendet wird:

Korollar/Definition 2.62 (Brouwerscher Fixpunktsatz). Sei $f: D^n \rightarrow D^n$ eine stetige Abbildung des Einheitsballes D^n auf sich. Dann hat f einen **Fixpunkt**, d.h. $\exists x \in D^n$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Angenommen f habe keinen Fixpunkt. Dann ist für jedes $x \in D^n$ die Halbgerade von $f(x)$ nach x definiert. Diese schneidet S^{n-1} in genau einem Punkt. Dies liefert eine stetige Abbildung $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$, die alle Punkte auf S^{n-1} festlässt.

Dann ist aber $h_t(x) = r(tx)$ eine Homotopie $h_t: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ mit $h_0 = \text{const}$ und $h_1 = \text{id}_{S^{n-1}}$. Die $(n-1)$ -Sphäre ist aber nicht zusammenziehbar wegen des Satzes 2.59 über die Homologie der Sphären. \square

Endlich können wir einen Satz beweisen, dessen Infragestellung uns vielleicht gar nicht in den Sinn gekommen wäre:

Korollar 2.63 (Invarianz der Dimension). Aus $m \neq n$ folgt $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$.

Beweis. Andernfalls wäre $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und also $S^{m-1} \approx S^{n-1}$, was nicht der Fall ist wegen 2.59. \square

Allgemeiner gilt:

Satz 2.64 (Nichthomöomorphie offener Teilmengen in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, n \neq m$). *Zwei nichtleere offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ sind für $n \neq m$ nicht homöomorph.*

Beweis. Wir zeigen den Satz nur für $n \geq 2$, da $n \leq 1$ recht einfach separat zu betrachten ist. Angenommen, es existiere ein Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$. Für ein $x \in U$ bezeichnen wir $y = \varphi(x)$.

Dann betrachten wir die Paare $U \setminus \{x\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \setminus \{y\} \subset V \subset \mathbb{R}^m$.

Wir möchten die zweite Formulierung des Ausschneidungsaxioms 2.56 für $X = \mathbb{R}^n, U = X_1, \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = X_2$ anwenden. Dazu bemerken wir, dass wir diesen Satz tatsächlich anwenden dürfen, da:

$$X = \mathbb{R}^n = U \cup (\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2.$$

Da $U \setminus \{x\} = X_1 \cap X_2$, erhalten wir somit:

$$H_p(U, U \setminus \{x\}) = H_p(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_p(X, X_2) = H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}). \quad (2.1)$$

Die lange exakte Sequenz der Homologie liefert mit $A = X_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \approx S^{n-1}$ und $X = \mathbb{R}^n$ für $p \geq 2$:

$$\cdots \rightarrow \underbrace{H_p(X)}_{=0} \rightarrow \underbrace{H_p(X, A)}_{\cong H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})} \rightarrow H_{p-1}(A) \rightarrow \underbrace{H_{p-1}(X)}_{=0} \rightarrow \cdots.$$

Also:

$$H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Identität (2.1) und deren Analogon für das Paar $V \setminus \{y\} \subset V$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.65. *Der Beweis des vorigen Satzes zeigt:*

$$H_p(D^n, S^{n-1}) \cong H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt noch viele weitere Anwendungen der bisher entwickelten Theorie. Eine bekannte Tatsache ist beispielsweise den **Satz vom Igel**, der eng mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz zusammenhängt und der besagt: Die Haare eines kugelrunden Igels können nicht alle in eine Richtung gekämmt werden;

es gibt mindestens einen Punkt, an dem dies nicht funktioniert. Für diesen und weitere Anwendungen siehe die angegebene Literatur, wie [SZ88].

Im Kapitel 11.7 wird dort beispielsweise der sogenannte **Brouwersche Separationssatz** bewiesen, der sagt, dass $\mathbb{R}^n \setminus S$ bzw. $S^n \setminus S$ aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten bestehen, falls $S \subset \mathbb{R}^n$ bzw. $S \subset S^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Sphäre ist, falls $n \geq 2$; für $n = 2$ heißt dieser Satz **Jordanscher Kurvensatz**. Im Gegensatz dazu werden \mathbb{R}^n und S^n durch eine darin enthaltene Sphäre der Dimension $< n-1$ nicht zerlegt.

Mit Hilfe solcher Zerlegungssätze kann man auch den sogenannten **Satz von der Invarianz des Gebietes** zeigen, der besagt, dass, falls $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu X ist, dann Y auch offen ist.

2.5.2 Beweis des Ausschneidungsaxioms

— 12. Vorlesung:
18. Juli '07 —

Baryzentrische Unterteilung

Die Grundidee ist es, den Simplex (links in Abb. 2.12) durch die Kette (rechts in Abb. 2.12) zu ersetzen und zu zeigen, dass wir dadurch die gleichen Homologiegruppen erhalten.

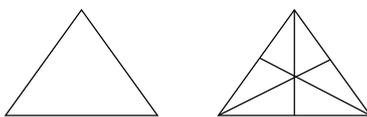


Abbildung 2.12. Baryzentrische Unterteilung.

Definition 2.66. 1. $[a_0, \dots, a_n]$ sei ein affines n -Simplex in einer konvexen Menge $V \subset \mathbb{R}^N$. Dann heißt

$$\bar{a} = \frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$$

sein **Baryzentrum** (oder sein **Baryzenter**).

2. Sei $[a_0, \dots, a_n]$ ein affines n -Simplex in einer konvexen Menge $V \subset \mathbb{R}^N$ und $b \in V$ ein weiterer Punkt. Wir bezeichnen mit

$$K_b[a_0, \dots, a_n] := [b, a_0, \dots, a_n]$$

die \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung für Ketten von affinen n -Simplizes in V (s. Abb. 2.13).

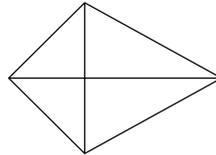


Abbildung 2.13. Definition der Abbildung $K_b[a_0, \dots, a_n]$.

3. Wir definieren nun Unterteilungsoperatoren

$$U_n : C_n^{\text{aff}}(V) \rightarrow C_n^{\text{aff}}(V),$$

wobei $C_n^{\text{aff}}(V)$ die affinen Simplexes in V bezeichnet. Dazu setzen wir $U_0 = \text{id}$,

$$U_n([a_0, \dots, a_n]) := K_{\bar{a}}(U_{n-1}(\partial[a_0, \dots, a_n])).$$

Lemma 2.67. Es gilt:

$$\partial_n U_n = U_{n-1} \partial_n.$$

Beweis. Mit Induktion. □

Wir verallgemeinern U_n nun auf beliebige topologische Räume:

Definition 2.68. Wir setzen:

$$U_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X), \quad U_n(\sigma) := \sigma \circ U_n(\text{id}_{\Delta_n}).$$

Weiterhin gilt $\partial_n U_n = U_{n-1} \partial_n$ und außerdem:

Lemma 2.69. U_n induziert die Identität auf der Homologie $H_n(X)$.

Beweis. Leider haben wir keine Zeit, hier eine Homotopie $R_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ zwischen U_n und $\text{id}_{C_n(X)}$ zu konstruieren. Dies wäre etwa eine Seite Detailarbeit. □

Problem:
Es fehlt noch etwas!

Die Gruppen $H_n(X, \mathfrak{a})$

Definition 2.70. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{a} = \{U_i \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X mit $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{U}_i = X$ (das Innere liefert also eine offene Überdeckung). Wir definieren:

$$C_n(\mathfrak{a}) := C_n(X, \mathfrak{a}) := \langle \sigma \in C_n(X) \mid \text{Bild } \sigma \subset U_i \text{ für ein } i \rangle$$

als die **Simplexes mit Feinheit** \mathfrak{a} .

Satz 2.71. Es gilt:

$$(H_n(\mathfrak{a}) =) H_n(X, \mathfrak{a}) \cong H_n(X) \quad \forall n.$$

Beweis. Wir betrachten die Inklusion von Komplexen

$$(C_\bullet(\mathfrak{a}) =) C_\bullet(X, \mathfrak{a}) \hookrightarrow C_\bullet(X).$$

Es genügt zu zeigen:

1. Jeder Zykel $z \in Z_n(X)$ ist homolog zu einem Zykel $\tilde{z} \in Z_n(\mathfrak{a})$.
2. Sind $z_1, z_2 \in Z_n(\mathfrak{a}) \subset Z_n(X)$ homolog bzgl. $B_n(X)$, so gilt schon $z - \tilde{z} \in B_n(\mathfrak{a})$.

Wir haben leider nicht die Zeit, dies hier zu zeigen. Es ist etwa eine Seite Detailarbeit. Hierbei wird auch wieder das Lemma von Lebesgue verwendet. Relevant geht auch das Lemma 2.69 ein: es reicht nämlich für die erste Behauptung zu zeigen, dass ein N existiert mit $U^N z \in Z_n(\mathfrak{a})$, weil nach dem Lemma z und $U^N z$ in $B_n(X)$ homolog sind. \square

Problem:
Es fehlt noch etwas!

Wir definieren nun:

Definition 2.72.

$$C_\bullet(X, A, \mathfrak{a}) := \frac{C_\bullet(X, \mathfrak{a})}{C_\bullet(A, \mathfrak{a} \cap A)}.$$

Für die entsprechenden Homologiegruppen gilt:

Korollar 2.73. Sei \mathfrak{a} eine Überdeckung von X mit $\mathring{\mathfrak{a}}$ offene Überdeckung von X . Dann gilt:

$$H_n(X, A, \mathfrak{a}) \cong H_n(X, A)$$

vermöge der Inklusion $C_\bullet(X, A, \mathfrak{a}) \hookrightarrow C_\bullet(X, A)$.

Beweis. Wir betrachten die langen exakten Sequenzen der Paare

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & H_n(X, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & H_n(X, A, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & H_{n-1}(A, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X, \mathfrak{a}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X). \end{array}$$

Alle senkrechten Pfeile bis auf den mittleren sind Isomorphismen nach Satz 2.71. Nach dem Fünferlemma 2.17 ist somit auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus. \square

Der Beweis des Ausschneidungsaxioms

Endlich können wir das Ausschneidungsaxiom

$$H_n(X, A) \cong H_n(X \setminus U, A \setminus U), \text{ falls } \bar{U} \subset \overset{\circ}{A},$$

beweisen, auf dem so viele Sätze des Abschnitts 2.5.1 basieren:

Beweis (des Ausschneidungsaxioms 2.55). Wir betrachten die Überdeckung

$$\alpha = \{A, X \setminus U\} \text{ mit } \overset{\circ}{\alpha} = \{\overset{\circ}{A}, X \setminus \bar{U}\}.$$

und die Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} C_q(X \setminus U) / C_q(A \setminus U) & \xrightarrow{j_q} & C_q(X, \alpha) / C_q(A, \alpha) \\ & \searrow i_q & \downarrow k_q \\ & & C_q(X) / C_q(A). \end{array}$$

Zwei der in diesem Diagramm auftretenden Gruppen — $C_q(X \setminus U)$ und $C_q(A)$ — können wir nach dem Homomorphiesatz (auch Noetherscher Isomorphiesatz) folgendermaßen in Beziehung setzen:

$$\frac{C_q(X \setminus U)}{C_q(X \setminus U) \cap C_q(A)} \cong \frac{C_q(X \setminus U) + C_q(A)}{C_q(A)}.$$

Die restlichen in obigem Diagramm vorkommenden Gruppen berechnen sich, wegen der nur aus zwei Mengen bestehenden Überdeckung α , sehr einfach aus diesen beiden:

$$\begin{aligned} C_q(A \setminus U) &= C_q(X \setminus U) \cap C_q(A), \\ C_q(X, \alpha) &= C_q(X \setminus U) + C_q(A) \subset C_q(X), \\ C_q(A, \alpha) &= C_q(X, \alpha) \cap C_q(A) = C_q(A). \end{aligned}$$

Diese folgen direkt aus den Definitionen von α und $C_q(X, \alpha)$ (Definition 2.70). Also induziert i_q einen Isomorphismus von Kettenkomplexen.

Die Abbildung k_q induziert aber auch einen Isomorphismus in der Homologie, nämlich nach Korollar 2.73. Wir erhalten somit:

$$H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow[\cong]{i_q} H_q(X, A),$$

wie behauptet. □

2.6 Zusammenhang simpliziale/singuläre Homologie

Wir zeigen nun, dass die beiden Homologie-Theorien, die wir in den vorangehenden Abschnitten eingeführt haben, im Wesentlichen das Gleiche liefern. Dies fassen wir am Ende dieses Abschnittes in den Eilenberg–Steenrod–Axiomen zusammen.

Sei dazu K ein simplizialer Komplex und $|K| \subset \Delta_N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ der zugrunde liegende Raum. Elemente von $C_p(K)$ sind spezielle affine Simplizes in $|K|$. Wir haben also eine Inklusion von Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_p(K) & \longrightarrow & C_{p-1}(K) & \longrightarrow & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \longrightarrow & C_p(|K|) & \longrightarrow & C_{p-1}(|K|) & \longrightarrow & & \end{array}$$

Es gilt aber sogar:

Satz 2.74. Die Inklusion $C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(|K|)$ induziert einen Isomorphismus von Homologiegruppen:

$$H_n(K) \cong H_n(|K|).$$

Beide Homologietheorien liefern also das gleiche Ergebnis und es folgt sofort der Satz 2.35, dessen Beweis wir verschoben hatten. Bevor wir Satz 2.74 aber beweisen können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Zunächst aber eine weitere unmittelbare Folgerung:

Korollar 2.75. Für einen triangulierbaren Raum X sind alle Homologiegruppen $H_n(X)$ endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X = |K|$ für ein gewisses K . Für $H_n(K)$ ist die endliche Erzeugung klar, da schon der ganze Komplex $C_\bullet(K)$ endlich erzeugt ist (und \mathbb{Z} noethersch ist). \square

Den Beweis von Satz 2.74 werden wir induktiv führen. Dazu benötigen wir den Begriff eines Paares auch für simpliziale Komplexe:

Definition 2.76. Sei $L \subset K$ ein Unterkomplex. Dann ist $C_\bullet(L) \subset C_\bullet(K)$ ein Unterkettenkomplex.

$$C_\bullet(K, L) := C_\bullet(K)/C_\bullet(L) \text{ und } H_n(K, L) := H_n(C_\bullet(K, L))$$

heißten *relativer simplizialer Kettenkomplex* und *relative simpliziale Homologie*.

Mit dieser Notation gilt können wir ein erster Resultat beweisen, das uns dem Induktionsschritt (nach der Anzahl der Simplizes im Komplex) für den Beweis von Satz 2.74 näher bringt:

Lemma 2.77. *Sei K ein simplizialer Komplex, $\Delta \in K$ ein maximaler Simplex und $L = K \setminus \{\Delta\}$ ein Unterkomplex. Dann gilt:*

$$H_n(K, L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \dim |\Delta| = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage direkt folgt aus:

$$C_n(K, L) \cong \begin{cases} \Delta \cdot \mathbb{Z}, & \dim \Delta = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\dim \Delta \neq n$ ist diese Isomorphie aber klar, da sich K und L nur in Dimension n unterscheiden. Im verbleibenden Fall ist der Quotient der beiden freien abelschen Gruppen gerade die freie abelsche Gruppe, die von Δ erzeugt wird. \square

Lemma/Definition 2.78. *Seien*

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n, 0, \dots, 0) \mid \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\} \\ \subset \Delta_N &= \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_{n+1}, \dots, \mu_N) \mid \lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum \lambda_i + \sum \mu_i = 1\} \end{aligned}$$

eine **Facette** und

$$|\Delta^c| = \{(0, \dots, 0, \mu_{n+1}, \dots, \mu_N) \mid \mu_i \geq 0, \sum \mu_i = 1\}$$

die **duale Facette** (Abb. 2.14). Dann sind $|\Delta_N| \setminus |\Delta^c|$ und $|\Delta|$ **homotopieäquivalent**.

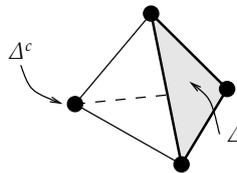


Abbildung 2.14. Eine Facette und ihre duale Facette.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt hierbei eine **Homotopieäquivalenz**, falls es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$; dies ist also eine etwas schwächere Eigenschaft als die eines Homöomorphismus.

Beweis. Wir betrachten die Homotopie

$$H: (|\Delta_N| \setminus |\Delta^c|) \times [0, 1] \rightarrow |\Delta_N|$$

$$H(\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_{n+1}, \dots, \mu_N, t) := \left(\frac{1}{1-t\mu} (\lambda_0, \dots, \lambda_n), \frac{1-t}{1-t\mu} (\mu_{n+1}, \dots, \mu_N) \right),$$

wobei $\mu = \sum \mu_i$. Wegen $(\lambda, \mu) \notin \Delta^c$ gilt $\mu < 1$; H ist also wohldefiniert. H ist eine Homotopie zwischen $\text{id}_{|\Delta_N| \setminus |\Delta^c|}$ und $H(0, 1) = f: |\Delta_N| \setminus |\Delta^c| \rightarrow |\Delta|$ mit $f|_{|\Delta_n|} := \text{id}_{|\Delta|}$, $H(\cdot, t) = \text{id}_{\Delta}$. Sei $i: |\Delta| \hookrightarrow |\Delta_N| \setminus |\Delta^c|$ die Inklusion. Dann gilt: $f \circ i = \text{id}_{\Delta}$, $i \circ f \sim \text{id}_{|\Delta_N| \setminus |\Delta^c|}$ vermöge H . \square

Damit können wir jetzt ein Resultat beweisen, das die Basis für den Induktionsschritt im Beweis von Satz 2.74 bilden wird. Die Homologiegruppen $H_p(D^n, S^{n-1})$ kennen wir dabei bereits aus Bemerkung 2.65:

Korollar 2.79. *Seien K ein Komplex, $\Delta \in K$ ein maximaler Simplex, $L = K \setminus \{\Delta\}$ und $\tilde{L} = K \cap \Delta^c$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} H_p(|K|, |L|) &\stackrel{\text{Ausschneidung}}{\cong} H_p(|K| \setminus |\tilde{L}|, |L| \setminus |\tilde{L}|) \\ &\stackrel{\text{Homotopieäquivalenz}}{\cong} H_p(|K| \cap |\Delta|, |L| \cap |\Delta|) \\ &\cong H_p(D^n, S^{n-1}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt nach Lemma 2.77:

$$H_p(K, L) \cong H_p(|K|, |L|) \quad \forall p.$$

Beweis. Wir müssen nur die Isomorphie $H_p(|K| \cap |\Delta|, |L| \cap |\Delta|) \cong H_p(D^n, S^{n-1})$ zeigen. Vermöge der Homotopie H wie in Lemma 2.78 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H_p(K, L) &\rightarrow H_p(|K|, |L|) \\ &\stackrel{\text{Ausschneidung}}{\cong} H_p(|K| \setminus (|K| \cap |\Delta^c|), |L| \setminus (|L| \cap |\Delta^c|)) \\ &\stackrel{\text{wie im Lemma}}{\cong} H_p(\underbrace{|K| \cap |\Delta|}_{=|\Delta|}, \underbrace{|L| \cap |\Delta|}_{=\partial\Delta}) \\ &\cong H_p(D^n, S^{n-1}), \end{aligned}$$

da $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \approx (D^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus ist. Das Bild von $\Delta \in Z_n(K, L)$ wird dabei auf den Erzeuger von $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong H_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$ abgebildet. Dies gibt den gewünschten Isomorphismus. \square

Schließlich können wir den Satz 2.74 vom Anfang des Abschnittes beweisen:

Beweis (von Satz 2.74). Wir gehen per Induktion nach der Anzahl der Simplizes vor. Für $|K| = \{p\}$ ein Punkt ist die Behauptung wahr nach dem Dimensionsaxiom (Satz 2.46):

$$H_0(\{p\}) = H_0(K) = \mathbb{Z}$$

und alle anderen Gruppen sind null.

Für den Induktionsschritt betrachten wir K und $L = K \setminus \{\Delta\}$, wobei Δ ein maximaler Simplex ist. Die lange exakte Sequenz der Paare gibt zusammen mit dem Korollar 2.79 und der Induktionsvoraussetzung, die sich ja auf L anwenden lässt:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{p+1}(K, L) & \longrightarrow & H_p(L) & \longrightarrow & H_p(K) & \longrightarrow & H_p(K, L) & \longrightarrow & H_{p-1}(L) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{p+1}(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_p(|L|) & \longrightarrow & H_p(|K|) & \longrightarrow & H_p(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|L|). \end{array}$$

Das Fünfer-Lemma (2.17) liefert nun: $H_p(K) \cong H_p(|K|)$. □

Damit haben wir endlich den Satz 2.35 über die Unabhängigkeit der Homologie von der Wahl der Triangulierung bewiesen, mit Hilfe dessen wir in 2.36 erst die Eulerzahl definieren und berechnen konnten.

Das eben Gezeigte können wir auch noch etwas allgemeiner hinschreiben:

Korollar 2.80. *Sei K ein simplizialer Komplex, L ein Unterkomplex. Dann gilt:*

$$H_p(K, L) \xrightarrow{\cong} H_p(|K|, |L|).$$

Beweis. Dies folgt ebenfalls aus dem Fünfer-Lemma. Das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_p(L) & \longrightarrow & H_p(K) & \longrightarrow & H_p(K, L) & \longrightarrow & H_{p-1}(L) & \longrightarrow & H_{p-1}(K) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_p(|L|) & \longrightarrow & H_p(|K|) & \longrightarrow & H_p(|K|, |L|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|L|) & \longrightarrow & H_{p-1}(|K|). \end{array}$$

kommutiert nämlich. □

Bemerkung/Definition 2.81. *Für ein triangulierbares Paar (X, A) haben wir gesehen, dass*

$$H_n(X, A) \cong H_n(|K|, |L|) \cong H_n(K, L),$$

falls $X \approx |K|$, $A \approx |L|$. Für den Nachweis haben wir lediglich die Sätze

ES 1: Homotopieaxiom: Satz 2.48

ES 2: Exaktheitsaxiom: Satz 2.53

ES 3: Ausschneidungsaxiom: Satz 2.55

ES 4: Dimensionsaxiom: Satz 2.46

sowie die Eigenschaft (s. Bemerkung 2.65)

$$H_p(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet.

Die Mayer-Vietoris-Sequenz und damit auch die letzte Eigenschaft waren aber eine Konsequenz aus den obigen vier Axiomen. Diese vier Axiome ES 1–4 heißen **Eilenberg–Steenrod–Axiome**, da sie, wie gerade gezeigt, die **Homologietheorie**, d.h. die Gruppen $H_n(X, A)$ für triangulierbare Paare (X, A) bestimmen.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, die Homologiegruppen von (X, A) zu definieren. Statt singulärer Simplizes kann man beispielsweise differenzierbare Simplizes oder auch C^∞ -Simplizes betrachten für Paare von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand oder andere Räume. Alle diese Absätze ergeben aber letztlich die gleiche Homologietheorie, wenn sie den vier Eilenberg–Steenrod–Axiomen genügen.

2.7 Zur Klassifikation der kompakten orientierbaren Flächen

Leider haben wir nicht die Zeit, die Klassifikation der kompakten (triangulierbaren) orientierbaren Flächen hier noch vorzuführen. Wenigstens das Hauptresultat möchten wir aber als Abschluss dieser Vorlesung erwähnen, da es ein sehr schönes Ergebnis ist und auch eine Anwendung in der algebraischen Geometrie besitzt.

Definition 2.82. 1. Unter einer **Fläche** verstehen wir hier eine 2-Mannigfaltigkeit, d.h. einen topologischen Raum X , so dass zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U existiert, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ der reellen Ebene ist: $U \approx V$.

2. Eine Triangulierung einer Fläche heißt **orientierbar**, falls man für jedes der Dreiecke eine Reihenfolge der Ecken angeben kann, so dass zwei Dreiecke mit einer gemeinsamen Kante diese Kante in umgekehrter Richtung durchlaufen (Abb. 2.15).

Satz/Definition 2.83 (Klassifikation der kompakten (triangulierbaren) orientierbaren Flächen). Ist X eine (triangulierbare) zusammenhängende kompakte orientierbare Fläche, dann ist X homöomorph zu einer Sphäre mit g Griffen für eine gewisse Zahl $g \in \mathbb{N}_0$. g heißt **Geschlecht** der Fläche.

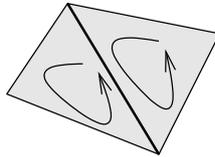


Abbildung 2.15. Orientierbarkeit einer Fläche.



Abbildung 2.16. Flächen vom Geschlecht 1, 1, 2.

Beweis (nur Beweisidee, siehe Kapitel 17 von [Ful95] für einen sehr anschaulichen Beweis). Man kann zeigen, dass sich eine solche Fläche (außer einer Sphäre) als ebenes Polygon mit $4g$ Seiten, bei dem jeweils 4 nebeneinander liegende Seiten nach dem Schema $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ identifiziert werden, darstellen lässt. Genauer kann man das Polygon sogar auf die Normalform bringen, die in Abbildung 2.17 zu sehen ist. \square

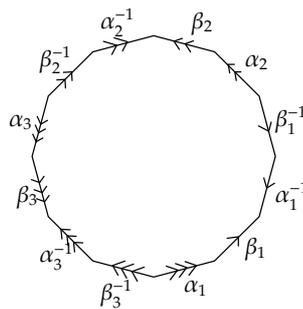


Abbildung 2.17. Die Normalform eines Polygons, aus dem eine kompakte orientierbare Fläche durch Identifizierung der Seiten α_i und β_i entsteht.

Beispiel/Definition 2.84 (Geschlecht einer ebenen algebraischen Kurve). Die komplexe Nullstellenmenge einer (glatten) algebraischen Kurve (ggf.

nach Hinzufügen von Punkten im Unendlichen) ist eine solche kompakte Fläche; die Zahl g heißt dann **Geschlecht** der Kurve.

1. Die komplexe Nullstellenmenge von $x^2 + y^2 - 1$ (reell ein Kreis) ist eine Sphäre; deren Geschlecht ist also $g = 0$. Kurven mit $g = 0$ heißen **rationale Kurven**.
2. Die komplexe Nullstellenmenge einer nicht-singulären ebenen Kurve vom Grad 3, beispielsweise $y^2 - x^2 + x^3 + 1/16$ (reell zwei Zusammenhangskomponenten) ist ein Torus, also eine Sphäre mit einem Griff; deren Geschlecht ist also $g = 1$. Solche Kurven heißen **elliptische Kurven**.
3. Man kann zeigen, dass jede glatte ebene algebraische Kurve vom Grad d Geschlecht $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ hat.

□

Von der Normalform, die im vorigen Beweis erwähnt wurde, ausgehend kann man auch relativ leicht die Fundamentalgruppen und die Homologiegruppen der Flächen ausrechnen:

Satz 2.85. *Die erste Homologie $H_1(X)$ einer (triangulierbaren) kompakten orientierbaren Fläche ist \mathbb{Z}^{2g} .*

Beweis. Auch dies geschieht im zitierten Kapitel von Fultons Buch. □

Genau wie bei Satz 2.39 ergibt sich daraus schließlich die allgemeinere Version des Polyedersatzes:

Satz 2.86 (Allgemeinerer Eulerscher Polyedersatz). *Für jede Triangulierung einer (triangulierbaren) kompakten orientierbaren Fläche gilt:*

$$e - k + d = 2 - g,$$

wobei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und d die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung und g das Geschlecht der Fläche ist.

Literatur

- Ful95. W. Fulton, *Algebraic Topology, A First Course*, Springer, 1995.
- Hat02. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, Download: <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>.
- May89. K.H. Mayer, *Algebraische Topologie*, Birkhäuser, 1989.
- PH97. U. Stambach P.J. Hilton, *A Course in Homological Algebra*, Springer, 1997.
- Rot. Rotman, *Introduction to the Theory of Groups*, Springer, ????
- Sch98. R. Scharein, *The KnotPlot Site*, www.knotplot.com, 1998.
- SZ88. R. Stöcker and H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner Stuttgart, 1988.
- vBL06. H.-C. Graf v. Bothmer and O. Labs, *Geometrical Animations Calendar 2006*, www.Calendar.AlgebraicSurface.net, 2006.

Index

- A^c 5
- A_t 57
- $C_\bullet(X, A)$ 70
- D^n 5, 74
- G-Überlagerung 48
- $H_n(X)$ 66
- $H_n(X, A)$ 70
- S^n 6, 73
- $X \approx Y$ 3, 5
- $[\alpha]$ 15
- $\text{Deck}(Y/X)$ 33
- $\Omega(X, x_0)$ 6
- $\alpha \sim \beta$ 13
- \mathcal{AB} 52
- \mathcal{G} 52
- \mathcal{S} 52
- \mathcal{TOP} 52
- \mathcal{TOP}_* 52
- \mathring{D}^n 5
- ∂_p 61
- b_p 62
- $f \simeq g \text{ rel } A$ 19
- $f: X \rightarrow Y$ 52
- $f_0 \simeq f_1$ 18
- Überlagerungsisomorphismus 26
- Comp 64

- Ab 52
- abgeschlossen 5
- Äquivalenz 52
- Alphabet 46
- A_t 57
- Ausschnittaxiom 71

- zweite Formulierung 71
- azyklisch 74

- Bahn 31
- Baryzenter 76
- Baryzentrum 76
- Basis 54
- Basispunkt 16
- Bettizahl 62
- Bild 55
- Blätterzahl 26
- b_p 62
- Brouwersche Separationssatz 76
- Brouwerscher Fixpunktsatz 74

- $C_\bullet(X, A)$ 70

- Deckbewegung 33
- Decktransformation 30, 33
- $\text{Deck}(Y/X)$ 33
- Deformationsretrakt 19
- ∂_p 61
- Diagrammjagd 56
- Differentialen 64
- Dimensionsaxiom 67
- diskrete Topologie 5
- duale Facette 81

- Ecken 59
- eigentlich diskontinuierlich 31
- Eilenberg–Steenrod–Axiome 84
- einfach zusammenhängend 39
- Einheitsball 5
- Einheitskreises 6

- Einheitssphäre 6
- elliptische Kurven 86
- endlich erzeugt 56
- Erzeugendensystem 56
- Eulerscher Polyedersatz 64
 - allgemeinere Form 86
- Eulerzahl 62
- exakt 55, 65
- exakt an der Stelle 55
- exakte Sequenz 55
 - kurze 55
 - spaltet 56
- f_* 17, 66
- Facette 81
- Faser 25
- Fixpunkt 74
- fixpunktfrei 31
- Fläche 84
- frei 31
- freie abelsche Gruppe 53, 54
- freie Gruppe über \mathcal{A} 46
- Fundamentalgruppe 16
- Fundamentalsatz der Algebra 25
- Funktor 53
 - kontravarianter 53
 - kovarianter 53
- Geschlecht 84, 86
- geschlossener Weg 6
- gleichmäßig stetig 21
- Groups 52
- $H_n(X, A)$ 70
- $H_n(f)$ 66
- Hochhebung 27
- homöomorph 5
- Homöomorphismus 3, 5
- Homologie der n -Sphäre 73
- Homologie eines Raumpaars (X, A) 70
- Homologiegruppe 62, 64
 - eines Komplexes 64
- Homologietheorie 84
- homotop 13, 18, 70
- homotop relativ A 19
- Homotopie 13, 18, 69
- homotopieäquivalent 81
- Homotopieäquivalenz 81
- Homotopieaxiom 68
- indiskrete Topologie 5
- Invarianz der Dimension 74
- inverse Weg 7
- isomorph 52
- Isomorphismus 52
- Isomorphismus zwischen zwei Überlagerungen 26
- Jordanscher Kurvensatz 76
- Kanten 59
- Kategorie 52
- Kern 55
- Klassifikationssatz der abelschen Gruppen 58
- Kleinsche Flasche 33
- Kokern 55
- kompakt 21
- Komplement 5
- Komplex
 - simplizialer 59
- Komplex abelscher Gruppen 64
- Komposition 52
- konstanter Weg 6
- kontravarianter Funktor 53
- kovarianter Funktor 53
- kurze exakte Sequenz 55, 65
- lange exakte Homologieequenz 65
- lange Homologiesequenz 70
- leeres Wort 46
- Lemma von Lebesgue 28
- Liftung 27
 - Eindeutigkeit 27
 - Homotopie- 29
 - Pfad- 28
- linear unabhängig 54
- lokal einfach 31
- lokal einfach zusammenhängend 42
- lokal wegzusammenhängend 35
- Möbiusband 32
- Mayer-Vietoris-Sequenz 72
- Morphismus 52, 64
 - zwischen Komplexen 64
- n -dimensionaler Einheitsball 5
- n -dimensionaler Einheitsball 74

- n -Ketten 66
- n -Ränder 66
- n -Sphäre 6,73
- n -te singuläre Homologiegruppe 66
- n -Zykel 66
- natürliche Quotientenabbildung 31
- Nichthomöomorphie offener Teilmengen
 - in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, n \neq m$ 75
- normale Überlagerung 41
- normale Untergruppe 38
- Normalteiler 38

- Objekten 52
- offene Menge 5
- $\Omega(X, x_0)$ 6
- Operation 30
- Orbit 31
- orientierbar 84

- Pfadliftung 28
- $\pi_0(X)$ 7
- $\pi_1(\gamma)$ 18
- $\pi_1(X)$ 16
- Potenzmenge 5
- Prismenkonstruktion 68
- projektive Raum 32

- Quotiententopologie 31

- Rand 65
- Randabbildung 71
- Rang 55,57
- rationale Kurven 86
- Raumpaare 70
- relative Homologie von X modulo A 70
- relative simpliziale Homologie 80
- relativer simplizialer Kettenkomplex 80
- Retrakt 19
- Retraktion 19

- Satz vom Igel 75
- Satz von der Invarianz des Gebietes 76
- Seifert – van Kampen 44
- semilokal einfach zusammenhängend 42
- Sequenz
 - exakt 55
 - exakt an der Stelle 55
- Sets* 52
- Silbe 46
- Simplex
 - aufgespannt durch Ecken 58
- Simplizes mit Feinheit α 77
- Simplizes von K 59
- simplizialer Komplex 59
- singuläre Kettenkomplex 66
- singuläres n -Simplex 65
- spaltet 56
- Standard n -Simplex 58
- starker Deformationsretrakt 19
- Stereographische Projektion 6
- sternförmig 70
- stetig 5
 - in x 5
- stetige Abbildung
 - zwischen Raumpaaren 70

- Teilraumtopologie 8
- Top* 52
- Top** 52
- Topologie 4
- topologischer Raum 5
- Torsionselement 57
- torsionsfrei 57
- Torsionsuntergruppe 57
- Torus 32
- transitiv 34
- treu 31
- triangulierbarer topologischer Raum 62
- Triangulierung 59
- triviale G -Überlagerung 48
- triviale Überlagerung 26

- Überlagerung 25
 - normal 41
- Überlagerungen 25
- Überlagerungsumgebung 25
- Umlaufzahl 23
- universelle Überlagerung 40
- Universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe 54
- Unterategorie 52

- verbindbar
 - durch einen Weg 6

92 Index

Vergissfunktork 53
verknüpfte Weg 7
von E erzeugt 56

Weg 6
geschlossen 6
konstanter 6

Wegzusammenhangskomponente 7
Wort 46

zusammenhängend 8
zusammenziehbar 19
Zwischenwertsatz 7, 10, 11